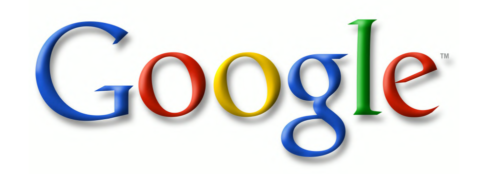
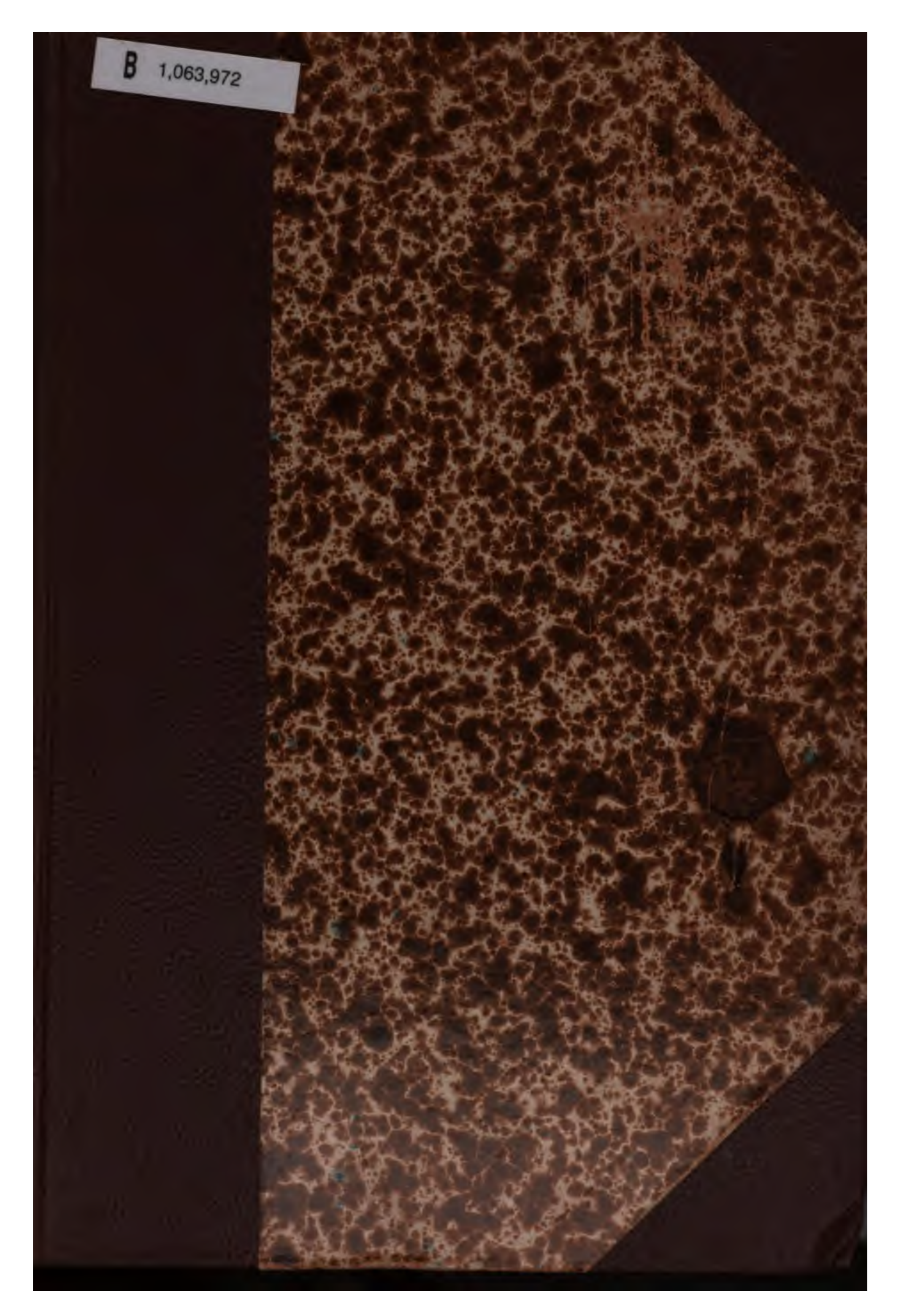


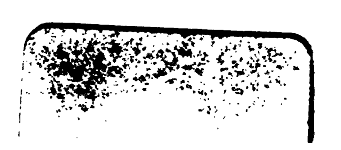

B 1,063,972




Ford - Messer
Bequest









SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.

Pages.

III. Assemblée générale du lundi 13 avril 1885 85

Rapport du Secrétaire . . . . *Ib.*

— du Trésorier 87

IV. Assemblée générale du mardi 14 avril 1885 90

V. — — du mercredi 15 avril 1885 92

Toast de M. G. Dewalque, président, au banquet de ce jour . 94

VI. Assemblée générale du jeudi 16 avril 1885 96

Approbation des comptes présentés par le Trésorier . . . . *Ib.*

Proclamation du résultat des élections 97

Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles . . . 98

AUTEURS.

Baule, 54. — Blondel, 81. — Bourgeat, 68. — Brifaut, 87. — Carbonnelle, 48, 85. — Charlier, 68. — Dr Cousot, 89. — Cuylits, 79, 80. — De Heen, 60. — Delgeur, 61, 62, 68, 73. — Delsaulx, 48. — Desplats, 73. 78, 82, 96. — De Tilly, 56. — F. Dewalque, 60. — G. Dewalque, 62, 68. 94. — Dollo, 61, 62, 68, 92. — Gelin, 59. — Gilbert, 48, 53, 54. 56, 59. — Dr Lefebvre, 77. — Le Paige, 48. — A. de Limburg-Stirum, 61, 62. — Mansion, 48, 53, 54, 56, 59. — Mœller, 74. — d'Ocagne, 48, 56, 59. — Oomen, 62. — Pasquier, 59. — Raclot, 61. — Schmitt, 59. — Smets, 68, 90, 93. — de Sparre, 48. — Swolfs, 62. — de la Vallée, 62, 63. — Van den Gheyn, 68, 69, 83. — Van Tricht, 60, 61. — Venneman, 74. — Verriest 74. — Warlomont, 74, 79.

SECONDE PARTIE

—

MÉMOIRES

Pages.

Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire, par P. Mansion 1

Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, par Ph. Gilbert 41

Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et sur le pendule conique, par le Cte Sparre de 49

Sur une lacune qui semble exister au début de l'enseignement de la géométrie descriptive, par M. le major De Tilly 95

Notice lithologique sur les îles Columbretas, par le R. P. Antonio Vicent, S. J. 105

Note sur le néocomien du haut Jura français par l'abbé Bourgeat 119

Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre des fonctions de plusieurs variables indépendantes, par M. Haton de la Goupillière . . 151

Note sur la tête d'un fœtus de Balænoptera Sibbaldii (Gray), par M. l'abbé Gérard Smets. 187

Sur la réduction aux fonctions elliptiques de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+F}}$, par M. le Cte de Sparre. 205

Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent, par M. Maurice d'Ocagne 231

L'Atrophie des muscles du thorax et de l'épaule chez les pleurétiques, par le Dr Desplats 239

Sur l'herpolodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque, par M. le Cte de Sparre. 249

La Théorie du navire, par M. Albert Baule 259

Les Affinités linguistiques des langues sémitiques et polynésiennes, par J. Van den Gheyn, S. J. 286

Note sur quelques dépôts littoraux des environs de Bruxelles, par le Cte Adolphe de Limburg-Stirum 305

Notes d'ostéologie erpétologique, par L. Dollo. 309

AUTEURS.

Baule, 259. — Bourgeat, 119. — Desplats, 239. — De Tilly, 95. — Dollo, 309 — Gilbert, 41. — Haton de la Goupillière, 151. — de Limburg-Stirum, 305. — Mansion, 1. — d'Ocagne, 231. — Smets, 187. — de Sparre, 49, 205, 249. — Van den Gheyn, 286. — Vicent, 105.

———

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau* $C_n - C_3H_5$.

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Expliquer la dualité des deux types, l'un brun et l'autre blond, qui se constatent dans tous les grands rameaux de la race aryenne, en opposition avec l'unité linguistique.*

4° *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

Le 1[er] octobre 1886 est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath. C. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* (
élus annuellement dans son sein. Le Préside
dents, le Secrétaire et le Trésorier font par
Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire e
seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'associ
présenté par deux membres. La demande, sig
adressée au Président, qui la soumet au Co
n'est prononcée qu'à la majorité des deux tier
L'exclusion d'un membre ne pourra être p
des motifs graves et à la majorité des deux tie
Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à
conque, une ou plusieurs parts du capital so
fondateurs. Ces parts sont de 500 francs. Les
versent une cotisation annuelle de 15 francs, q
rachetée par une somme de 150 francs, versée
Le Conseil peut nommer des *membres ho*
savants étrangers à la Belgique.
Les noms des membres fondateurs figuren
par ordre d'inscription, et ces membres reçoi
plaires des publications annuelles qu'ils ont s
capital social. Les membres ordinaires et les n
reçoivent un exemplaire de ces publications.
Tous les membres ont le même droit de v
blées générales.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois ses
se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête d
durer quatre jours. Le public y sera admis
de cartes. On y lit les rapports annuels, et
Bureau et le Conseil pour l'année suivante.
Les deux autres sessions se tiendront en o
Elles pourront durer deux jours, et auro
pal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique, ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et les séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

NOTE. — Le tirage au sort, ordonné par l'article 3, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 4e, 3e, 5e et 1re.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV[a] de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO P. P. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette

fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Liste des membres fondateurs.

S. E. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de . .	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE.	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (1)	Anvers.
Le chanoine MAES (1)	Bruges.
L'abbé A. DE LEYN	Bruges.
LEIRENS-ELIAERT, sénateur	Alost.
Joseph SAEY.	Bruxelles.
Frank GILLIS (1)	Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le duc D'URSEL, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY	Le Rœulx.
Le Cte DE T'SERCLAES (1)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE CONCEPTION	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liège.
Le Cte DE BERGEYCK	Beveren-Waes.

(1) Décédé.

L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège d'Alost	Alost.
Le chanoine de Wouters	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
S. E. le cardinal Haynald, archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa (Hongrie).
S. E. Mgr S. Vannutelli, nonce apostolique . .	Vienne.
S. G. Mgr Du Roussaux, évêque de	Tournay.
S. G. Mgr Goossens, archevêque de	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin, évêque de.	Namur.

Liste des membres honoraires.

Le Pce B. Boncompagni, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei	Rome.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
Charles Hermite, membre de l'Institut	Paris.
Le général Newton	New-York.
Le docteur Foerster	Aix-la-Chapelle.
Le R. P. Perry, S. J., de la Société royale de Londres	Stonyhurst.
A. de Lapparent	Paris.
A. Barré de Saint-Venant, membre de l'Institut .	Paris.
A. Béchamp	Lille.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut .	Paris.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

D'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).
ABBELOOS (Chanoine), docteur en théologie, vicaire général. — Malines.
D'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.
ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).
ALBEAR Y LARA (Brigadier D. Francisco), ingénieur, directeur du canal de Vento. — La Havane (Cuba).
ALCOLADO, S. J. (R. P.), professeur d'analyse, Colegio de S. José, plazuela de Santa-Cruz. — Valladolid (Espagne).
ALEXIS, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.
ALFAGEME (José), catedrático de Fisica y Quimica en el Instituto. — Santiago (Espagne).
ALMAIN-DE HASE, architecte, 157, rue de la Loi. — Bruxelles.
ALMERA (Abbé Jaime), profesor de Geologia en el Seminario de Barcelona (Espagne).
ANDRÉ (J.-B.), ingénieur, 18, rue de la Fausse-Porte. — Givet (Ardennes — France).
ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).
ARDUIN (Abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
ARNOULD (Colonel), directeur de l'École industrielle, 59, rue Princesse. Lille (Nord — France).
ASCHMAN (Camille), professeur à l'Institut agricole. — Ettelbrück (Grand-Duché de Luxembourg).
D'ASPREMONT-LYNDEN (Cte Charles), château d'Haltinnes par Andenne (Namur).
AUGIER, docteur en médecine, professeur aux Facultés catholiques, 48, rue Henri Kolb. — Lille (Nord — France).
D'AUXY DE LAUNOIS (Cte Alb.). — Jurbise.
BAGUET (Charles), avocat, receveur de l'Université, 6, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Baillon, 10-11, place de la Calandre. — Gand.
Bapst (Germain), 153, boulevard Hausmann. — Paris.
Barcia Caballero (Juan), Ayudante de Clases prácticas de Anatomia de la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).
Bardin (Abbé Louis), professeur de Géologie à la Faculté, 19, rue de la Préfecture. — Angers (Maine-et-Loire — France).
Barff (Frédéric), 100, Abbey Road, Kilburn. — Londres (Angleterre).
Baule (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas, — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).
Bauwens (Abbé), vicaire à Sainte-Anne, boulevard du Château. — Gand.
Bayet (Adrien), 30, nouveau marché aux Grains — Bruxelles
Bayet (Ernest), 68, rue Joseph II. — Bruxelles.
Beaucourt (Abbé Léopold), curé des Écaussines d'Enghien.
Béchamp, doyen de la Faculté catholique de médecine, 36, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).
Beckers (Auguste), avocat, rue Gérard. — Woluwe-Saint-Lambert.
Bedel (Abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire d'Aix (Bouches-du-Rhône. — France).
Belin (S. G. Mgr.), évêque de Namur.
Bellefroid (Victor), 13, rue Hors-Château. — Liège.
Bellemans (Charles), comptable, marché aux OEufs. — Anvers.
Belpaire (Théodore), directeur du service provincial, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
de Benazé, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.
de Bergeyck (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liège.
Berlingin (Melchior), ingénieur à l'établissement de la Vieille-Montagne. — Bray-et-Lû (Seine-et-Oise — France)
Bernaldez (Fernando), inspector general del cuerpo de Ingenieros de minas de España, calle Ancha de S. Bernardo, 37, pral. izq. — Madrid (Espagne.)
Bernardin (Monsieur), conservateur du Musée commercial-industriel, au Pensionnat. — Melle (Flandre-Orientale).
Bertrand (Dieudonné), docteur en médecine, 36, rue du Nord — Bruxelles
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
Béthune-Eliaert (B^on^), sénateur, rue du Pont. — Alost.

Béthune (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.

Bichot (Abbé), professeur au Petit-Séminaire, 19, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Bivort (Alfred). — Fontaine-l'Évêque.

Blariaux (Jean), ingénieur civil. — La Haye-du-Puits (Manche — France).

Blas (Ch.), professeur à l'Université, de l'Académie royale de médecine. — Louvain.

Blondel (Alfred), ingénieur, 14, rue de la Magdeleine. — Tournay.

Blondiaux (Auguste), ingénieur, 7, rue des Plantes. — Bruxelles.

Blot (Abbé), 23, avenue de Messine. — Paris.

de la Boëssière-Thiennes (Mis), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).

Bonamis (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).

Boncompagni (Pce B.), de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, palazzo Piombino, piazza Colonna. — Rome.

Bonnevie (Auguste), ingénieur, 119, rue des Coteaux. — Bruxelles.

Bonnevie (Victor), avocat, 7, rue du Congrès. — Bruxelles.

Borginon (Gustave), docteur en médecine, 58, rue Dupont. — Bruxelles.

de Borman (Cher Camille), 29, place Saint-Jean. — Liège.

Bossu (Abbé L.), professeur à l'Université, rue de Bériot. — Louvain.

Boulay (Abbé), professeur aux Facultés catholiques, 9, rue des frères Vaillant. — Lille (Nord — France).

Bouquillon (Abbé Th.), professeur aux Facultés catholiques, 54, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Bourdeau (Abel), médecin de bataillon de 1re classe, École des Pupilles de l'Armée. — Alost.

Bourg (Victor), ingénieur des mines. — Bois-du-Luc, par Houdeng (Hainaut).

Bourgeat (Abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

de Bousies (Cte Adhémar), rue d'Havré. — Mons.

du Boys (Paul), ingénieur des ponts et chaussées. — Valence-sur-Rhône (Drôme — France).

Brabandt (Louis), 161, avenue Louise. — Bruxelles.

Braet (Gustave), au Ministère des chemins de fer. — Bruxelles.

Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 42, avenue de Breteuil. — Paris.

Brassine (J.-J.), général commandant la 2e division d'infanterie. — Anvers.

Braun, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire de Kalocsa (Hongrie).

Breithof (N.), professeur à l'Université, 52, rue du Canal.—Louvain.

Brémen (Alfred), pharmacien, 2, rue Louvrex. — Liège.

Bribosia, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, 16, rue Neuve. — Namur.

de Briey (Cte Louis), 23, rue Joseph II. — Bruxelles.

Brifaut (Armand), avocat, 14, rue Crespel. — Bruxelles.

Bruno (Monsieur), supérieur du Collège de la Sainte-Trinité. — Louvain.

Bruylants, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, rue de Malines. — Louvain.

Buisseret (Anatole), docteur en sciences naturelles, 30, rue Vivegnis. — Liège.

de Burlet (Constantin), ingénieur des ponts et chaussées, directeur de la Société nationale des chemins de fer vicinaux, rue de la Vanne. — Bruxelles.

de Bussy (L.), inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.

Camauër (Jules), avocat. — Dinant.

Campelo (Abbé), professeur de chimie à l'Université. — Séville (Espagne).

de Cannart d'Hamale (François), 2, rue du Poivre. — Malines.

Cappellen (Guillaume), avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.

Carbonnelle, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Carlier (Joseph), ingénieur. — Thuin (Hainaut).

Carnoy (Abbé J.-B.), professeur à l'Université, 11, place du marché aux Grains. — Louvain.

Carnoy (Joseph), profess. à l'Université, place du Peuple. — Louvain.

Cartuyvels (Mgr), vice-recteur de l'Université. — Louvain.

Cartuyvels (Jules), professeur à l'Université, 12, place de l'Université. — Louvain.

Casarès (Antonio), catedrático de Quimica y rector de la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Casarès (Demetrio), farmaceutico. — Santiago (Galice — Espagne).

Casarès (Firmino), en la Coruña (Espagne).

César (Docteur), 14, rue Chaudronnerie. — Dijon (Côte-d'Or — France).

Charneux (A.), rue de la Croix. — Namur.
du Chastel (Cte Henri), 55, rue de Trèves. — Bruxelles.
Chautard, doyen de la Faculté catholique des sciences, 3, rue Saint-Martin. — Lille (Nord — France).
Choné, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.
Claes (Paul), 79, boulevard de Tirlemont. — Louvain.
Cogels (J.-B.-Henri), 38, longue rue de l'Hôpital. — Anvers.
Collège d'Alost, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
Collège Notre-Dame de la Paix. — Namur.
Collège Saint-Michel. — Bruxelles.
Collège Saint-Servais. — Liège.
Colson (Chanoine). Château de Bierbais par Mont St-Guibert (Brabant).
Cools (Auguste), ingénieur. — Lierre.
Coopman (Louis), ingénieur, 21, quai du Midi. — Nice (Alpes-Maritimes — France).
Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.), vicaire à Sainte-Walburge. — Bruges.
de Corswarem (Ch^{er} Adrien), avocat. — Hasselt.
Cousin (L.), professeur à l'Université, 26, rue Léopold. — Louvain.
Cousot, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Dinant.
Cousot (Georges), docteur en médecine. — Dinant.
Craninckx (Oscar), 125, rue de la Loi. — Bruxelles.
Craninckx (P.-J.-E)., professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
Criquillion (Louis), ingénieur provincial, rue du Progrès. — Saint-Nicolas (Waes).
de Croy (P^{ce} Gustave). — Le Rœulx.
de Croy (P^{ce} Juste), 53, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.
Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
Dassonville-Lepée, (A.), rue de Bruges. — Menin.
Davignon (Julien), 33, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
De Baets (Herman), 16, rue du Bélier. — Gand.
Debaisieux, professeur à l'Université. — Louvain.
De Beys (Louis), avocat, 10, rue Van Maerlant. — Bruxelles.
De Blauwe (Jean), juge de paix, Grand'Place. — Courtrai.
De Bloo (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
De Brouwer (Abbé), supérieur du Petit-Séminaire. — Roulers.

De Brouwer, rue d'Ostende. — Bruges.

De Bruyn (Tony), juge au tribunal de 1re instance, 96, rue du Trône. — Bruxelles.

De Decker (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 34, rue de Vénus. — Anvers.

De Heen (Pierre), ingénieur, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Hults (Ernest), juge. — Alexandrie (Égypte).

De Jaer (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo — Bruxelles.

De Jaer (Émile), professeur à l'Université, rue de la Station. — Louvain.

De Jaer (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché aux Bêtes. — Mons.

De Lantsheere (Léon), docteur en droit, 17, rue Caroly. — Bruxelles.

Delcour (Ch.), professeur émérite à l'Université, ancien ministre, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Delebecque-Vergauwen, 12, rue aux Draps. — Gand.

De Leyn (Abbé A.), principal du Collège Saint-Louis. — Bruges.

Delgeur (Dr Louis), 15, rue Léopold. — Anvers.

De Lorge (Abbé J.), professeur au Séminaire. — Roulers.

Delsaulx, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Delvigne (Chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.

De Marbaix, professeur à l'Université de Louvain. — Eynthout par Westerloo (Anvers).

De Meester (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.

Depetre (Octave), ancien ministre, 97, rue du Bac. — Paris.

De Preter (Herman), ingénieur, 34, rue de Ligne. — Bruxelles.

Deprez (Max), juge au tribunal de 1re instance, 5, rue des Dominicains. — Mons.

De Prins, place du Peuple. — Louvain.

De Ridder (Abbé J.-B.), curé-doyen de Saint-Pierre, 13, rue des Vaches. — Louvain.

De Ridder (Paul), 68, chaussée de Haecht. — Bruxelles.

Descamps (Abbé A. J.), inspecteur des Écoles du canton de Mons, curé de Nimy (Hainaut).

Descamps (É.), professeur à l'Université. — Louvain.

Desplats (Docteur), professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

DESSAIN (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
DETIERRE (Abbé), aumônier de l'École vétérinaire. — Bruxelles.
DE TILLY (J.), lieutenant colonel d'artillerie, directeur de l'Arsenal de construction, de l'Académie royale de Belgique. — Anvers.
DEVIVIER (A.), professeur à l'Université, rue de Namur. — Louvain.
DEVOLDER (Joseph), ministre de la justice, 141, rue de Stassart. — Bruxelles.
DEWALQUE (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
DEWALQUE (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liège.
DIAZ DE ARCAYA (Manuel), docteur ès sciences, professeur d'histoire naturelle au Lycée de Saragosse (Espagne).
DINCQ-JORDAN, ingénieur et industriel, Pont-Canal, Jemappes (par Mons-Station).
DOBET (Ferdinand), avocat, membre de la Chambre des Représentants, place St-Aubin. — Namur.
DOLLO (Louis), aide-naturaliste au Musée d'histoire naturelle de Belgique, 69, rue du Cornet. — Etterbeek (Bruxelles).
DE DORLODOT (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).
DE DORLODOT (H.), docteur en théologie, vicaire à Ciney.
DOUCET (Auguste), avocat, membre de la Chambre des Représentants, rue du Collège. — Namur.
DUCROST (Abbé), curé de Solutré (Saône-et-Loire — France).
DUGNIOLLE (Max), professeur à l'Université, 57, Coupure. — Gand.
DUMONT (A.), docteur en médecine, 18, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
DUMONT (André), ingénieur, 51, longue rue d'Argile. — Anvers.
DUMONT (Madame), 20, rue Soufflot. — Paris.
DUMONT, S. J. (R. P.), 10, Parkstreet. — Calcutta (Bengale).
DURANT (Henri), inspecteur-général des charbonnages patronnés par la Société générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.
DU ROUSSAUX (S. G. Mgr), évêque de Tournay.
DUSAUSOY (Clément), professeur à l'Athénée royal, 117, chaussée de Courtrai. — Gand.
DUTORDOIR (Hector), sous-ingénieur provincial, 104, rue Digue de Brabant. — Gand.
ÉCOLE LIBRE SAINTE-GENEVIÈVE, rue Lhomond. — Paris.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard, Paris.
Eloin, docteur en médecine, Gesves par Assesse (Namur).
de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Achel, par Neerpelt (Limbourg).
d'Esclaibes, S. J. (R. P.), doyen de la faculté des sciences; internat des Facultés catholiques. — Angers (Maine-et-Loire. — France.)
Fabry (Henri), 32, rue du Champ-de-Mars. — Bruxelles.
Faucon (A.), docteur en médecine. — Le Rœulx.
Feijeiro (Maximino), catedrático de Patologia y Clinica en la Universidad. — Santiago (Espagne).
Félicien (Monsieur), supérieur-général des Joséphites. — Grammont.
Feliù y Perez (Bartolomé), profesor en la Universidad, Ariban, 11. — Barcelona (Espagne).
Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal, en la Universidad. — Santiago (Galice. — Espagne).
Ferrand de Missol (Amédée), 40, boulevard Montparnasse. — Paris.
de Fierlant (Bon Albert), ingénieur à la Société générale des chemins de fer économiques, 10, rue d'Idalie. — Bruxelles.
Finlay (Carlos), medico. — Habana (Cuba).
Fita y Colomé S. J. (R. P. Fidel), calle del Lobo, 34, pral. — Madrid (Espagne).
Flahault (Charles), docteur ès sciences naturelles, chargé de cours à la Faculté des sciences. — Montpellier (Hérault — France).
Focillon (Ad.), professeur en retraite de l'Université de France, 15, rue Vauquelin — Paris.
Foerster (D^r^), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.
Fontaine (Théodore), professeur à l'Université de Louvain. — Moustier-sur-Sambre (Namur).
de Fontenay (Henri), ingénieur des Arts et Manufactures, château de Crécez par Is-sur-Tille (Côte-d'Or — France).
Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).
de Foville (Abbé), Grand-Séminaire d'Issy-sur-Seine. — Paris.
Franc (Anatole), Villa Franc. — Saint-Raphaël (Var) ou 16, rue de Montgolfier. — Lyon (Rhône — France).
François, S. J. (R. P. Alexis), professeur au Collège de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.
Francotte (Xavier), docteur en médecine, 15, quai de l'Industrie. — Liège.
Gallez (Louis), docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Châtelet.

GARBE (J.-B.), ingénieur aux usines de Bleyberg-Montzen. — Montzen (Liège).

DE GARCIA DE LA VEGA (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Augustins. — Paris.

GAUTIER (Chanoine), 79, rue Notre-Dame. — Malines.

GELIN (Abbé), professeur au collège Saint-Quirin. — Huy.

GÉNARD (Léonard), ingénieur au charbonnage de Bracquegnies (Hainaut).

DE GERANDO (Bon L.), chef de service de la marine de l'État, 1, rue St-Évrault. — Angers (Maine-et-Loire. — France).

GÉRARD (Alphonse), ingénieur aux minières de Lamadelaine (Grand-Duché de Luxembourg).

DE GERLACHE (Paul), gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

GILBERT (Alfred), docteur en médecine. — Givet (Ardennes — France).

GILBERT (Jules), industriel. — Givet (Ardennes — France).

GILBERT (Ph.), professeur à l'Université, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, 20, rue Notre-Dame. — Louvain.

GILLET (Camille), ingénieur, professeur à l'Institut agronomique et vétérinaire de Santa Catalina. — Buenos-Ayres (République Argentine).

GOEDSEELS (Édouard), sous-lieutenant au 11e régiment de ligne, 137, rue de Namur. — Louvain.

GOEMANS (Jean), commissaire-voyer. — Westmeerbeek, par Westerloo (Anvers).

GOETHALS-MALFAIT (Cie), 8, rue des Foulons. — Gand.

GOFFIN (Joseph), ingénieur en chef à la Société industrielle d'électricité, 18, rue de France. — Bruxelles.

GOIX (Alph.), docteur en medecine, 40, rue de Joinville. — Paris.

GOOSSENS (S. G. Mgr), archevéque de Malines.

DE GORDON (Dr Antonio), catedrático de Fisiologia en la Universidad. — Habana (Cuba).

GORIS (Charles), 105, rue Rogier. — Schaerbeek.

GRAND'EURY (Cyrille), ingénieur, correspondant de l'Académie des sciences, rue de Paris. — Saint-Étienne (Loire — France).

GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Antibes (Alpes-Maritimes. – France).

GRANERO S. J. (R. P. Juan), colegio de N S^ra del Recuerdo, Chamartin de la Rosa. — Madrid (Espagne).

GRAVEZ (Adrien), président du Comité houiller du Centre. — La Louvière (Hainaut).
GREINDL (Bon Gustave), 20, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
GRINDA (Jesus), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22°, 2°, — Madrid (Espagne).
GRISAR (Armand), 5, rue Hoboken. — Anvers.
GROB (Abbé Jacques). vicaire à Michelbuch, par Ettelbrück (Grand-Duché).
DE GROSSOUVRE (A), ingénieur des mines. — Bourges (Cher — France).
DE GRUNNE (Cte François), capitaine d'artillerie, 67, rue Belliard. — Bruxelles.
HAAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 133, rue Tirlemont. — Louvain.
HAHN, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
HAIRION, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 9, boulevard de Tirlemont. — Louvain.
HALLEUX (Émile), rue du Vieux-Bourg. — Bruges.
HAMARD (Abbé), 12, rue des Dames. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).
HANQUET (Ferdinand), 16, rue du Laveu. — Liège.
HAP (Joseph), étudiant, 334, chaussée de Wavre. — Etterbeek (Bruxelles).
DE HARLEZ (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, (J. N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 9, avenue du Trocadéro. — Paris.
DE HAULLEVILLE (B^{on}), 135, rue de la Loi. — Bruxelles.
DE LA HAYE (Auguste), capitaine adjudant-major à l'École de volontaires. — Louvain.
HAYNALD (S. E. le cardinal), archevêque de Kalocsa et Bàcs (Hongrie).
HAYOIT, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, professeur à l'Université, 66, rue de Namur. — Louvain.
D'HEMRICOURT DE GRUNNE (Cte), sénateur, 10, rue Montoyer. — Bruxelles, ou château d'Hamal, par Tongres.
HENRY (Hector). — Dinant.
HENRY (Louis), professeur à l'Université, de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HERMITE (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.
HERVIER (Abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).
HEUDE, S. J. (R. P.) — Zi-ka-wey (Chine).
HOUTART (Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
HOUTART (Octave), industriel, 22, boulevard Baudouin. — Bruxelles.
HUBERT (Eugène), docteur en médecine, professeur à l'Université, 13, rue Léopold. — Louvain.
HUET (Charles), industriel, rue des Jardins. — Lille (Nord — France).
IMPERIALI (M[is]) des P[ces] de Francavilla, 10, rue Montoyer. — Bruxelles, ou château d'Hamal par Tongres.
INSTITUT SAINT-IGNACE. — Anvers.
JACMART, lieutenant général, 4, rue Verboeckhaven. — Bruxelles.
JACOBS (Victor), avocat, membre de la Chambre des Représentants, 49, chaussée de Charleroy. — Bruxelles.
JANNET (Claudio), professeur aux Facultés catholiques, 74, rue de Vaugirard. — Paris.
JANSSENS, docteur en médecine. — Puers (Anvers).
JANSSENS (Guillaume), rue de la Station. — Louvain.
JENNER (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la Marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).
JIMENO (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).
DE JOIGNY (B[on] G.), 29, rue de l'Industrie. — Bruxelles.
JOLLY (B[on]) lieutenant-général, 16, rue de Livourne. — Bruxelles.
JOLY (Léon), avocat, 28, rue de la Concorde. — Bruxelles.
JORDAN (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varennes. — Paris.
JOUBERT, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.
JOURDAIN (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.
JULIENS (Herman), régisseur du comte de Mérode. — Weerde (Brabant).
DE KERCKHOVE (V[te] Eugène), ancien membre de la Chambre des Représentants. — Malines.
KERVILER (René), ingénieur des ponts et chaussées. — Saint-Nazaire (Loire-Inférieure — France).
KIRSCH (R. P. Alexandre M.) C. S. C. — Notre-Dame (Indiana, États-Unis).
DE KIRWAN (Charles), inspecteur des forêts, 15, rue Vaubecour. — Lyon (Rhône — France).

KLEIN S. J. (R. P. Léopold Martial), catholic University College. — Dublin (Irlande).

KURTH (Godefroid), professeur à l'Université, 62, rue Lairesse.—Liège.

LACOMPTE (Camille), docteur en médecine. — Tamise.

LACOR (E.), professeur à la Faculté catholique des sciences, 18, rue des Fossés-St-Jacques. — Paris (France).

LAFONT, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire héliospectroscopique, 10, Parkstreet. — Calcutta.

LAGASSE (Alexandre), pharmacien, 4, rue Saint-Maurice — Nivelles.

LAGASSE (Charles), ingénieur principal des ponts et chaussées, 53, rue de Hollande. — Bruxelles.

LAGASSE (Jules), notaire, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liège.

LAMBERT (Camille), ingénieur, 29, rue Fabry. — Liège.

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur. — Morlanwelz (Hainaut).

LAMEY (R. P. Dom Mayeul) O. S. B., prieuré de Saint-Benoît, Grignon par Les Laumes (Côte-d'Or — France).

LAMY (Mgr.), président du collège Marie-Thérèse. — Louvain.

DE LAPPARENT (A.), professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

LATINE, docteur en médecine. — Marbaix-Marbisoux (Brabant).

LATINIS (Victor), ingénieur, chef de service des forges et aciéries de la Société du Nord et de l'Est. — Trith-Saint-Léger (Nord — France).

LAVA (Jules), ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées, 4, rue des Cendres. — Bruxelles.

LAVAUD DE LESTRADE, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).

LEBESCONTE (P.), pharmacien, 15, Bas de Lices. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).

LEBON, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.

LEDRESSEUR (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 75, voer des Capucins. — Louvain.

LEFEBVRE, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (Abbé Bruno), professeur de sciences et de mathématiques, au Petit-Séminaire. — Floreffe (Namur).

LEFEBVRE (Abbé Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (Abbé J.), professeur à la faculté de théologie. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

LEFEBVRE (Paul), avocat, 7, rue du Pepin. — Bruxelles.

LEGOUIS, S. J. (R. P.), docteur ès-sciences, 98, rue de Vaugirard. — Paris.

LEGRAND-BENOIT, 31, rue de Bruxelles. — Namur.

LE GRELLE (Cte Ferdinand), 21, rue Van Brée. — Anvers.

LEIRENS-ÉLIAERT, sénateur, rue du Pont. — Alost.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan par Pepinster (Liège).

LEMOINE, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

LEMONNIER (Abbé Th.), professeur au Petit-Séminaire de Mont-aux-malades, par Rouen (Seine-Inférieure. — France).

LE PAIGE (C.), professeur à l'Université de Liège, 21, rue des Anges. — Liège.

LHERMITE (Edmond), ingénieur. — Ciney.

DE LICHTERVELDE (Cte Gontran), secrétaire de légation, 29, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE (Cte Charles), 24, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE DE PAILHE (Cte Édouard), 47, rue des Arts. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Adolphe), 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Samuel), 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Thierry), sénateur, rue Hautport. — Gand.

DE LIMMINGHE (Cte), château de Gesves, par Assesse (Namur).

LIMPENS (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

DE LISLEFERME (Henry), ingénieur de la marine en retraite. — Taillebourg (Charente-Inférieure — France).

DE LOCHT (Léon), ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liège.

LONNEUX (Abbé), chez M^e la B^ne O. de Dieudonné, rue Léopold. — Louvain.

MABILLE (Léon), professeur à l'Université. — Louvain.

MAERTENS (Chanoine), professeur au petit Séminaire. — Saint-Nicolas.

MALCORPS (Ernest), avocat, 5, rue des Vaches. — Louvain.

DE MALEINGREAU D'HEMBISE (Bon Georges), 99, rue Braemt. — Bruxelles.

MALISOUX (Émile), ingénieur principal des mines. — 11, rempart ad aquam. — Namur.

KLEIN S. J. (R. P. Léopold Martial), cat ... velles
Dublin (Irlande). ... s Dominicains. —
KURTH (Godefroid), professeur à l'Unive
LACOMPTE (Camille), docteur en médec
LACOR (E.), professeur à la Faculté d ... Auxerre (Yonne —
des Fossés-St-Jacques.
LAFONT, S. J. (R. P.), directeur de ... 27, rue Marie-Thérèse.
pique, 10, Parkstreet
LAGASSE (Alexandre), pharmacien. ... - Moulins (Allier —
LAGASSE (Charles), ingénieur princip
de Hollande. — Bru ... que. — Guéret (Creuse
LAGASSE (Jules), notaire, 112, chaus
LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvre ... esseur de zoologie au
LAMBERT (Camille), ingénieur, 29, ... aza de ministerios, 5°,
LAMBIOTTE (Victor), ingénieur. — ... ne).
LAMEY (R. P. Dom Mayeul) O. S ... Ignacio. — Manresa.
gnon par Les Laur ... ore de l'Académie royale
LAMY (Mgr.), président du collège ... e Anne. — Louvain.
DE LAPPARENT (A.), professeur à ... Louvain.
— Paris. ... 1, rue de la Fontaine —
LATINE, docteur en médecine.
LATINIS (Victor), ingénieur, ... e, 30, rue Vital. — Passy
la Société du N
(Nord — Fra ... ques. — Tournay.
LAVA (Jules), ingénieur hono ... du Vertbois. — Liège.
Cendres. — Br ... des Représentants, 42, rue
LAVAUD DE LESTRADE, prêtre
au Séminaire. ... eghem par Anvers.
France). ... — Chesterfield (Angle-
LEBESCONTE (P.), pharmacie
Vilaine — I ... uant Saint-Berthuin. — Ma-
LEBON, docteur en médecin ... mur).
LEDRESSEUR (Charles), doct ... e centrale des arts et manu-
sité, 75, vo ... Bruxelles.
LEFEBVRE, docteur en mé
de l'Academ ... rd, rue de Namur. — Louvain.
— Louvain. ... de l'usine à gaz, 73, rue de
LEFEBVRE (Abbé Bruno), p ... Nord — France).
au Petit-Sé ... ace du Peuple. — Louvain.

MICHAUX, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
MICHIELS (Chanoine), professeur au collège Saint-Rombaut. — Malines.
MIEST (Émile), ingénieur aux établissements de S[te]-Marie d'Oignies. — Tamines.
MIOT (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.
MIR (R. P. Michel), S. J. Membre de l'Académie Royale d'Espagne, 3, calle de dos Amigos. — Madrid (Espagne).
MISONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).
MOELLER, docteur en médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.
MONCHEUR (B[on]), 54, boulevard de Waterloo. — Bruxelles; ou Namêche (Namur).
DE MONGE (Léon), professeur à l'Université, rue aux Jones. — Louvain.
MONSARRAT (G.), 14, rue des Capucines — Paris.
DE MOREAU D'ANDOY (Ch[er]), ministre de l'agriculture et des travaux publics. — Andoy par Jambes (Namur); ou rue Verte— Namur.
MORETUS (René), place de Meir. — Anvers.
MOTAIS (Abbé Al.), prêtre de l'oratoire, professeur au Grand-Séminaire. — Rennes (Ille-et-Vilaine. — France).
MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 21, rue Duvivier. — Liège.
DE NADAILLAC (M[is]), 8, rue d'Anjou. — Paris.
NAMÈCHE (M[gr]), ancien recteur magnifique de l'Université. — Louvain.
DE NAMUR D'ELZÉE (C[te]), sénateur. — Dhuy par Eghezée (Namur).
DE NÉDONCHEL (C[te] Léon), 80, rue de la Loi. — Bruxelles.
NÈVE (Félix), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 52, rue des Orphelins. — Louvain.
NÈVE (Louis), ingénieur. — Brecht (Anvers).
NEWTON (Général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.
NICOT (Rev.), S. J. — Maison S[t]-Louis. — Saint-Hélier (île de Iersey).
NOËL (Abbé François), professeur de religion à l'École normale. — Mons.
NOLLÉE DE NODUWEZ, 116, rue Royale. — Bruxelles.
NYSSENS (Julien), ingénieur des ponts et chaussées, 190, rue de la Loi, — Bruxelles.
NYSSENS (Pierre), ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue Sainte-Marguerite. — Gand.

OBET DE CHEVVEL, docteur en médecine. — Honfleur (Calvados — France).

D'OCAGNE (Maurice), ingénieur des ponts et chaussées, 8, rue des Fonderies. — Rochefort (Charente-Inférieure. — France).

OLDENHOVE (Philippe), ingénieur, propriétaire à Florival-sur-Dyle, par Grez-Doiceau (Brabant).

O'MALLEY, S. J. (R. P.), St. Patrick's college. — Melbourne (Victoria — Australie).

OOMEN (A.), 18, rue St-Laurent. — Anvers.

ORTIZ (Juan-Miguel), Jefe superior de Administracion, Guanabacoa. — Habana (Cuba).

ORTIZ (Abbé L. Ph.), doyen de la cathédrale. — Léon (Espagne).

OSY DE WICHEM (Bon), longue rue de l'Hôpital. — Anvers.

OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.

OUVERLEAUX (Félix), étudiant en droit, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

PALGEN (Charles), ingénieur des hauts-fourneaux d'Audun-le-Tiche (Lorraine allemande).

PARDON (Gustave), ingénieur. — Maurage, par Bracquegnies (Hainaut).

PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

DE PATIN DE LANGEMARCK (Vte), château de Langemarck (Flandre-Occidentale.)

PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.

PELLIGERO (Gonzalo), avocat, rédacteur en chef de la *Voz de Cuba*. — La Havane (Cuba).

DE PEÑARANDA (Frédéric), 21, rue de la Science. — Bruxelles.

PEPIN (R. P. Théophile), S. J. — Cluses (Haute-Savoie — France).

PERRY, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire de Stonyhurst, de la Société royale de Londres. — Stonyhurst near Blackburn (Angleterre).

PETIT (Chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.

PEYROT (Gérard), 33, rue Vieille-Bourse. — Anvers.

PICHAULT (Stéphane), ingénieur, chef de section à la Société John Cockerill. — Tilleur (Liège).

PIÉRAERTS (Mgr), recteur magnifique de l'Université. — Louvain.

PIERROT (Abbé), vicaire au Bonhomme, par la Poutroye (Haute-Alsace — Allemagne).
DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).
PINEDA (Dr Juan Miguel), Rosa, 30. — Cadiz (Espagne).
PIRARD (Abbé), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.
PIRET (Camille), ingénieur à Monceau-Fontaine. — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
PISCÉ (Chanoine), rue des Bateaux. — Malines.
PLANTÉ (Gaston), licencié-ès-sciences, 56, rue des Tournelles. — Paris.
POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon.— Dijon (Côte-d'Or— France).
DE PONTHIÈRE (Albert), propriétaire-agriculteur, 23, rue d'Archis. — Liège.
DE POSCH (Major), sous-intendant militaire de 1re classe, 152, Chaussée d'Haecht. — Bruxelles.
POWIS DE TEN BOSSCHE, conseiller provincial, 8, rue Belliard. — Bruxelles.
DE PRELLE, 44, rue Kipdorp. — Anvers.
PROOST (Alphonse), professeur à l'Université, 19, rue Notre-Dame. — Louvain.
PROVINCIAL (R. P.) de la compagnie de Jésus, 131, rue Royale extérieure. — Bruxelles.
PRUDHAM (Abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.
QUAIRIER, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.
RACHON (Abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).
RACLOT (abbé), curé, à la station météorologique de Marac, par Saint-Loup-sur-Aujon (Haute-Marne. — France).
RADEL (O.). — Saint-Loup-sur-Aujon (Haute-Marne — France).
DE RADIGUEZ (F.), inspecteur provincial de la voirie vicinale. — Namur.
RATHOUIS, S. J. (R. P.). — Zi-ka-wey (Chine).
RAVAIN (Abbé J.-R.), 14, rue Bernier. — Angers (Maine-et-Loire — France).
RÉCHIN (Abbé), professeur au Collège de Mamers (Sarthe — France).
REDIER (Dr Jean), professeur aux Facultés catholiques, 1, rue de Pas. — Lille (Nord — France).

de Regnon, (R. P. Théodore), S. J., 15, rue de la Vielle-Estrapade. — Paris.

Renard (Alphonse), conservateur au Musée d'histoire naturelle. — Bruxelles.

Reynaert, docteur en médecine, rue du Progrès. — Saint-Nicolas.

de Ribaucourt (Cte), sénateur, 33, rue Ducale. — Bruxelles.

Roberti (Jules), notaire, membre du Conseil provincial du Brabant. — Louvain.

de la Roche (Cher Camille), rue de Houdain. — Mons.

de la Roche (Chanoine Ch.), rue du Chambge. — Tournay.

de la Roche de Marchiennes (Émile). — Harvengt, par Harmignies (Hainaut).

Roderburg (Fritz), docteur en sciences naturelles, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Rodillon (Abbé), 16, rue Tramassac. — Lyon (Rhône. — France).

Rojas, S. J. (R. P.), professeur d'histoire naturelle, Colegio. — Carrion de los Condes. — Espagne).

Rollier (Émile), ingénieur, 37, rue Léopold. — Malines.

Romero (Narciso), director del Colegio de 1a y 2a enseñauza de S. Francisco de Borja, calle del Desengaño, 27, prâl. — Madrid (Espagne).

de Rouillé (Cte), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.

Roure y Rovirola (Pablo), 3, Acequia. — Gerona (Catalogne. — Espagne).

Roussel (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

de Rubempré (Pce), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.

Saey (Henri), notaire. — Renaix.

Saey (Joseph), 18, avenue de la porte de Hal. — Bruxelles.

Saey (Abbé Pr.), vicaire à Saint-Étienne, 20, cour du Prince. — Gand.

Saint-Hilaire (Mis de Qucux de), au château de Saint-Hilaire, par Soubize (Charente-Inférieure. — France); ou 3, rue Soufflot. — Paris.

de Saint-Venant (A. Barré), membre de l'Institut. — Saint-Ouen, près Vendôme (Loir-et-Cher — France).

Salterain (Pedro), ingénieur des mines. — La Havane (Cuba).

de Salvert (Vte), professeur aux Facultés catholiques, 157, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

SANCHEZ, S. J. (R. P. Hilario), Colegio. — Carrion (Palencia — Espagne).
DE SANTA CRUZ (Ivan Armada Hernandez de Cordova, Mis), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).
SANZ (Pelegrin), ingeniero civil. — Castellon de la Plana (Espagne).
SANZ Y LOPEZ (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).
SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE (Anatole), château de St-François — Farciennes (Hainaut); ou 155, chaussée de Vleurgat. — Ixelles.
SCHMIDT (Henri), intendant de la maison de Croy. — Le Rœulx.
SCHMITZ (Gaspar), 2, avenue de Wilryck. — Anvers.
SCHNEIDER, docteur en médecine, 26, rue Belliard. — Bruxelles.
SCHOBBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.
SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).
DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT (Ch^er^), vice-président du Conseil provincial de la Flandre-Orientale. — Saint-Nicolas.
SERRET (Paul), professeur à l'Institut catholique, 240, rue de Vaugirard. — Paris.
SIMONIS (Alfred), sénateur. — Verviers.
SIMONIS (Iwan), industriel. — Verviers.
SIMONIS (Louis), industriel. — Verviers.
SMEKENS (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.
SMETS (Abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Hasselt.
SNYERS, docteur en médecine, 10, rue de l'Évêché. — Liège.
SNYERS (Raymond), ingénieur, 15, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.
DEL SOCORRO (José Maria Solano, Mis), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41-bajo. — Madrid (Espagne).
SOLVYNS (Albert), 7, avenue de la Place d'Armes. — Gand.
SOREIL, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).
DE SOUSBERGHE (M^e^ la V^tesse^), 6, rue Guimard. — Bruxelles; ou château de Virelles, près Chimay.
DE SOUZA GONZALVÈS (José), ingénieur civil, rua de Jungueira, 79. — Belem-Lisbonne (Portugal).
DE SPARRE (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

Spina (R. P. Pedro) S. J., directeur de l'Observatoire du collège catholique — Puebla (Mexique).

Springael (Auguste), ingénieur. 47, rue Vander Kindere — Uccle.

Stappaerts (Eugène), juge au tribunal de 1re instance. — Anvers.

Stasse, professeur au collège de la Sainte-Trinité, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Stillemans (Chanoine A.), docteur en philosophie et lettres, supérieur du Séminaire. — Saint-Nicolas.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

Stoesser, (Alphonse), directeur-gérant de la Société anonyme du charbonnage de Sacré-Madame. — Dampremy (Hainaut).

Stoffaes (Abbé), licencié ès-sciences, professeur au collège Saint-Joseph. — Lille (Nord-France).

Storms (Abbé Camille), curé de Ganshoren par Jette (Brabant).

Storms (John), 32, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.

Storms (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 24, rue de l'Hôtel-des-Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Suchetet (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen (Seine-Inférieure. — France).

Suttor (Eugène), 124, rue Potagère. — Bruxelles.

Swolfs (Abbé), professeur au Petit-Séminaire. — Malines.

Taymans (Émile), avocat, 90, rue de Stassart. — Bruxelles.

Teixeira (Gomes), professeur à l'Université. — Coimbra (Portugal).

Tercelin (Félix), rue du Mont-de-Piété. — Mons.

Theunis (Auguste), répétiteur à l'Université, 83, rue de Tirlemont. — Louvain.

Thibaut (L.), ingénieur. — Sars-Longchamps, par La Louvière (Hainaut).

Thibaut (Xavier). — Jambes.

Thiébauld (Charles), avocat, 60, rue Saint-François. — Bruxelles.

Thiébaut (Fernand), ingénieur. — Marchienne-au-Pont (Hainaut).

Thiernesse (Abbé), curé d'Ittre, par Virginal (Brabant).

Thirion (Alphonse). — Sclayn par Namèche (Namur).

Thirion, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Timmermans (François), ingénieur de la Société de Couillet, par Charleroi.

Toussaint (Charles), ingénieur, 54, rue Delocht. — Schaerbeek.
Tras, S. J. (R. P.), professeur au collège de la Paix. — Namur.
de Trazegnies (M[is]). — Corroy-le-Château, par Gembloux.
Troch (Pierre), inspecteur provincial des écoles primaires. — Lierre.
de T'Serclaes (M[gr] Charles), président du Collège belge. — Rome.
de T'Serclaes (C[te] Jacques), capitaine au 1[er] rég. d'artillerie, 27, rue Wiertz. — Bruxelles.
t'Serstevens (Léon), 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.
Tykort (Émile), ingénieur civil. — Perck, par Vilvorde.
d'Ursel (C[te] Aymard), capitaine d'artillerie, 25, rue de la Science. — Bruxelles.
d'Ursel (C[te] Charles), conseiller de légation, 22, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
d'Ursel (C[te] Ludovic), sénateur, 22, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
du Val de Beaulieu (C[te]), 55, avenue des Arts. — Bruxelles.
Valette (Madame), 20, rue Soufflot. — Paris.
de la Vallée Poussin (Charles), de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.
Van Aertselaer (Chanoine), directeur de l'Institut S[t]-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.
Van Biervliet (Alb.), chargé de cours à l'Université catholique, 39, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Van Biervliet (Joseph), professeur à l'Université, 1, rue Saint-Hubert. — Louvain.
Vanden Berg (Charles), notaire, place Saint-Paul. — Liège.
Vanden Branden de Reeth (Mgr), Évêque d'Érythrée. — Malines.
Vanden Gheyn (R. P. Joseph) S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.
Vanden Peereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liège.
Vanden Peereboom (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Courtrai.
vanden Steen de Jehay (C[te] Hermann), capitaine au 3[e] régiment d'artillerie, 6, avenue Louise. — Bruxelles.
vander Bruggen (B[on] Maurice), rue du Gouvernement. — Gand.
van der Elst (Léon), avocat à la cour d'appel, 62, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
Vanderesse (Chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.
Vander Haeghen (William), avocat, 44, rue Berckmans. — Bruxelles.
vander Straten-Ponthoz (C[te] François), 13, rue de la Loi. — Bruxelles.

VANDER STRATEN-PONTHOZ (Cte Ignace), général d'artillerie en retraite. 27, rue Joseph II. — Bruxelles.

VANDER VOORDT (Jules), ingénieur, 83, marché aux Chevaux. — Anvers.

VAN DE WOESTYNE (Chanoine), professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.

VAN DORPE (Jules), docteur en médecine, 297, rue Rogier. — Bruxelles.

VAN DRÈCHE, docteur en médecine, rue de l'Ouvrage. — Namur.

VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.

VAN GAMEREN (Chanoine), rue du Bruul. — Malines.

VAN GOIDSNOVEN, docteur en médecine, 45, rue de la Casquette. — Liège.

VAN GULICK, S. J. (R. P.), 2237, rue de Tongres. — Maastricht (Pays-Bas).

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 161, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

VANNUTELLI (S. E. Mgr S.), nonce apostolique. — Vienne (Autriche).

VAN ORTROY (Fernand), sous-lieutenant au 1er régiment de chasseurs à cheval. — Gand.

VAN OVERLOOP (Eugène), banquier, 48, rue Royale. — Bruxelles.

VAN SCHENDEL (Théodore), ingénieur, industriel. — Malines.

VAN SEGVELT (Edmond), 112, boulevard des Arbalétriers. — Malines.

VAN TRICHT, S. J. (R. P.), Institut St-Ignace, 47, courte rue Neuve. — Anvers.

VAN ZEEBROECK (Abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.

VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liège.

VAULTRIN, inspecteur des forêts. — Foix-sur-Ariège (Ariège — France).

VAZQUEZ ILLA (Ricardo) Jefe del Batallón Reserva n° 68. — Sarria (Espagne).

VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université. — Louvain.

VERCRUYSSE (Victor), 61, rue de France. — Courtrai.

VERHELST (Abbé), professeur à l'Institut Saint-Boniface, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

VERHOUSTRAETEN (R.), ingénieur, chantier John Cockerill. — Anvers.

VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 25, rue des Écreniers. — Louvain.

VERSTRAETEN (Camille), docteur en médecine, professeur à l'Université, 30, rue Charles-Quint. — Gand.

VICAIRE (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.

VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

VIGORDAN, S. J. (R. P.), rector del colegio del Jesus. — Tortosa (prov. de Tarragona — Espagne).

VILAIN XIIII (Vte Stanislas), 11, rue du Trône. — Bruxelles.

VILLAFUERTE (Eliodoro), presbitero, calle de las Dalicas. — Santiago (Chili).

DE VILLEGAS DE SAINT-PIERRE (Cte), 28, rue Marie de Bourgogne. — Bruxelles.

DE VILLEGAS DE SAINT-PIERRE (Cte Ulric). — Ganshoren par Jette (Brabant), ou 1, rue de Spa. — Bruxelles.

DE VILLERS-VERGAUWEN, 12, marché au Lin. — Gand.

VILLIÉ, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

VIÑES (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).

VISART (Cte Amédée), bourgmestre de Bruges.

DE VOCHT (Abbé), curé de Zeelst, par Eindhoven (Brabant-Septentrional. — Pays-Bas).

DE VORGES (E. Domet), 74, rue Miromesnil. — Paris.

WALRAVENS (Abbé Adelson), professeur au séminaire de Bonne-Espérance, par Binche.

WARD (John), ingénieur civil, 73, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, hôpital militaire. — Louvain.

WASSEIGE (Armand) fils, banquier, 2bis, rue Godefroid. — Namur.

WAUTELET (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

DE WAVRIN (Mis), 49, boulevard du Régent. — Bruxelles.

DE WECK (Abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).

WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

WITTMANN (Jules), docteur en médecine. — Malines.

Witz (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 104, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Wolf, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.
de Wouters (Chanoine). — Braine-le-Comte.
de Wouters (Ch^er^ Lambert), Rotselaer, par Wespelaer (Brabant).
Wouters (Abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.
Ysebrant de Lendonck (Albéric), place Liévin-Bauwens. — Gand.
Zech (Guillaume), négociant. — Soignies.
Zoude (Abbé Léopold), boulevard Cauchy. — Namur.
Zwaenepoel (Alfred), avocat, 41, rue du Conseil. — Ixelles.

Liste des membres décédés.

(Janvier à décembre 1885.)

V[te] Joseph de Biolley. . . . . Verviers.
P[ce] Emmanuel de Croy . . . . Le Rœulx.
Joseph Everarts . . . . Hévillers.
Hubert d'Hoof . . . . Gand.
Eugène Lavaux. . . . . Saint-Léger.
Abbé Nuyts . . . . Bruxelles.
Solvyns, sénateur . . . . Tronchiennes.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1[re] Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. Antoine d'Abbadie.
Adan de Yarza.
Albear y Lara.
R. P. Alcolado, S. J.
Arnould.
A. Barré de Saint-Venant.
Baule.
Théodore Belpaire.
R. P. de Benazé, S. J.
P[ce] Boncompagni.
du Boys.
R. P. Braun, S. J.
N. Breithof.
Constantin de Burlet.
L. de Bussy.

MM. R. P. Carbonnelle, S. J.
Joseph Carnoy.
Abbé Coppieters de Stockhove.
L. Cousin.
Louis Criquillion.
Louis De Beys.
R. P. Delsaulx, S. J.
J. De Tilly.
Dusausoy.
R. P. d'Esclaibes, S. J.
Fabry.
Franc.
Gauthier-Villars.
Abbé Gelin.
Ph. Gilbert.

MM. Goedseels.
B[on] G. Greindl.
Abbé Grob.
de Grossouvre.
C[te] François de Grunne.
Haton de la Goupillière.
Charles Hermite.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Camille Jordan.
R. P. Joubert, S. J.
Lacor.
Lava.
R. P. Lafont, S. J.
Charles Lagasse.
Camille Lambert.
R. P. Dom Lamey.
Abbé Bruno Lefebvre.
C. Le Paige.
C[te] Charles de Liedekerke
de Lisleferme.
Léon de Locht.
Paul Mansion.
de Marsilly.
C[te] de Maupeou.
Micha.
Général John Newton.
J. Nyssens.
P. Nyssens.

MM. d'Ocagne.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
R. P. Perry, S. J.
Chanoine Piscé.
V[te] de Salvert.
Sanz y Lopez.
P. Sanz.
Paul Serret.
R. Snyers.
C[te] de Sparre.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
Fernand Thiébaut.
R. P. Thirion, S. J.
François Timmermans.
C[te] Jacques de T'Serclaes.
C[te] Aymard d'Ursel.
Albert Van Biervliet.
E. Vandenpeereboom.
Van Schendel.
Abbé Van Zeebroeck.
Varquez Illá.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.
John Ward.
Aimé Witz.

2[e] Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Alfageme.
Aschman.
C[te] Ch. d'Aspremont-Lynden.

MM. Barff.
A. Bechamp.
Charles Blas.

MM. Alfred Blondel.
Bonamis.
Auguste Bonnevie.
Branly.
Alfred Brêmen.
Bruylants.
Antonio Casares.
Chautard.
R. P. Choné, S. J.
Pierre De Heen.
Abbé J. Delorge.
Herman De Preter.
A Devivier.
François Dewalque.
Dincq-Jordan.
André Dumont.
R. P. Dumont, S. J.
Dutordoir.
Feliù y Perez.
Bon A. de Fierlant.
R. P. François, S. J.
L. de Gerando.
Gérard.
Gillet.
R. P. Granero, S. J.
Gravez.
Grisar.
Hector Henry.
Louis Henry.
René Kerviler.
Jules Lagasse.

MM. Lambiotte.
Lemoine.
Malisoux.
Malou.
U. Massalski.
Mertens.
Chanoine Michiels.
Lucien Misonne.
Joseph Mullenders.
Oldenhove.
R. P. O'Malley, S. J.
Louis Nève.
Ouverleaux.
Palgen.
Pichault.
Abbé Pirard.
G. Planté.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
R. P. de Regnon, S. J.
Roderburg.
Salterain.
de Souza Gonzalvès.
Springael.
Auguste Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Jules Vander Voordt.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. Verhoustraeten.
R. P. Viñes, S. J.

3e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

MM. Chanoine Abbeloos.
d'Acy.
Fr. Alexis.
Almera.
Arcelin.
Cte Alb. d'Auxy de Launois.
Ch. Baguet.
Baillon.
Bapst.
Abbé Bardin.
Abbé Bauwens.
Ern. Bayet
Bernardin
Mis de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Boulay.
Abbé Bourgeat
Cte L. de Briey.
Buisseret.
Abbé Campelo.
Abbé Carnoy.
Firmino Casares.
Chanoine Colson.
Dassonville.
Abbé De Brouwer.
Docteur Louis Delgeur.
Chanoine Adolphe Delvigne.
Max Deprez.
Abbé Descamps.
Abbé Detierre.
Gustave Dewalque.
Diaz de Arcaya.
Dollo.

MM. Abbé Ducrost.
Max Dugniolle.
R. P. Fita, S. J.
Flahault.
Docteur Foerster.
Fontaine.
Abbé de Foville.
Grand'Eury.
Grinda.
Abbé Hamard.
Cte d'Hemricourt de Grunne.
Abbé Joseph Hervier.
R. P. Heude, S. J.
R. P. Kirsch.
Charles de Kirwan.
Godefroid Kürth.
A. de Lapparent.
Lebesconte.
Abbé Ferdinand Lefebvre.
Cte G. de Lichtervelde.
Cte Adolphe de Limburg Stirum.
Abbé Lonneux.
de Maleingreau.
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
R. P. Mir, S. J.
Mello.
Mis de Nadaillac.
Abbé Noël.
Oomen.
Abbé Rachon.
R. P. Rathouis, S. J.

MM. Abbé Renard.
Ém. de la Roche.
R. P. Rojas, S. J.
G. Schmitz.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
John Storms.
R. Storms.
Abbé Swolfs.
Cte Charles d'Ursel.
Charles de la Vallée Poussin.
MM. R. P. Van den Gheyn, S. J.
Van Drèche.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Abbé Verhelst.
R. P. Vicent, S. J.
Abbé de Vocht.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Augier.
Barcia Caballero.
D. Bertrand.
Borginon.
Abel Bourdeau.
Bribosia.
César.
Cousot.
G. Cousot.
P. J. E. Craninck.
Cuylits.
Debaisieux.
Desplats.
A. Dumont.
Éloin.
A. Faucon (Le Rœulx).
Feijeiro.
Finlay.
Xavier Francotte.
Gallez.
MM. Alfred Gilbert.
Goix.
Haan.
R. P. Hahn, S. J.
Hairion.
Hayoit.
Eugène Hubert.
Janssens.
Alexandre Lagasse.
Latine.
Lebon.
Charles Ledresseur.
Lefebvre.
E. Masoin.
Jules Matagne.
Michaux.
Léopold Miot.
Mœller.
Obet.
Alphonse Proost.

MM. Reynaert.
Schneider.
Schobbens.
Snyers.
Struelens.
Van Dorpe.
Van Goidsnoven.
MM. Van Keer berghen.
Venneman.
Verriest.
Verstraeten.
R. Warlomont.
Wittmann.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle.

MM. Auguste Beckers.
Adolphe Berleur.
Victor Bonnevie.
Abbé Th. Bouquillon.
Armand Brifaut.
François de Cannart d'Hamale.
Jules Cartuyvels.
Davignon.
Pce Gustave de Croy.
Pce Juste de Croy.
Herman De Baets.
Tony De Bruyn.
Ernest De Hults.
De Lantsheere.
De Marbaix.
É. Descamps.
Ferdinand Dohet.
Doucet.
Focillon.
Paul de Gerlache.
Grandmont.
Bon de Haulleville.
Victor Jacobs.
MM. Claudio Jannet.
Vte Éugène de Kerckhove.
Paul Lefebvre.
Legrand-Benoit.
Cte Ferdinand Le Grelle.
Cte Édouard de Liedekerke.
Émile Limpens.
Henri Mayer.
Léon de Monge.
Cher de Moreau d'Andoy.
Cte Léon de Nédonchel.
Otto.
Pelligero.
A. de Ponthière.
De Posch.
F. de Radiguez.
Pce de Rubempré.
Henri Saey.
Henri Schmidt.
Théophile Smekens.
Émile Stinglhamber.
Charles Thiebauld.
Léon t'Serstevens

MM. Chanoine Vanderesse.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.
Gustave Van Zuylen-Orban.
Vte St. Vilain XIIII.
Cte de Villegas de Saint-Pierre.
MM. Visart.
Abbé Adelson Walravens.
Armand Wasseige.
Vincent Wéry.
Zwaenepoel

MEMBRES DU CONSEIL.

1884-1885.

—

Président, M. Gustave Dewalque.
1er *Vice-Président,* M. L. Cousin.
2e *Vice-Président,* M. Ch. Lagasse.
Secrétaire, R. P. Carbonnelle, S. J.
Trésorier, M. Armand Brifaut.

MM Mis de la Boëssière-Thiennes.
Fr. de Cannart d'Hamale.
L. Delgeur
Chanoine Delvigne.
F. Dewalque.
André Dumont.
Paul de Gerlache.
Ph. Gilbert.
L. Henry.
Général Jacmart.
Dr Lefebvre.
P. Mansion.
A. Proost.
Léon t'Serstevens.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.

—

Secrétaire adjoint.

. . . .

MEMBRES DU CONSEIL.

1885 - 1886.

—

Président, M. le Dr DESPLATS.
1er *Vice-Président,* M. Paul MANSION.
2e *Vice-Président,* M. Alphonse PROOST.
Secrétaire, le R. P. CARBONNELLE.
Trésorier, M. Armand BRIFAUT.

MM. le Mis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
Fr. DE CANNART-D'HAMALE.
L. COUSIN.
L. DELGEUR.
Chanoine DELVIGNE.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
A. DUMONT.
Ph. GILBERT.
L. HENRY.
Général JACMART.
Ch. LAGASSE.
Dr LEFEBVRE.
Léon T'SERSTEVENS.
Cte Fr. VANDER STRATEN-PONTHOZ.

—

Secrétaire adjoint.

. . . .

BUREAUX DES SECTIONS.

1884-1885.

—

1re Section.

Président, M. Gilbert.
Vice-Présidents, MM. le Vte de Salvert et Pasquier.
Secrétaire, M. Alb. Van Biervliet.

2e Section.

Président, R. P. Van Tricht.
Vice-Présidents, MM. l'abbé De Lorge et G. Bruylants.
Secrétaire, M. le Bon Alb. de Fierlant.

3e Section.

Président, M. Domet de Vorges.
Vice-Présidents, MM. le chanoine Delvigne et le Dr Delgeur.
Secrétaire, M. A. Buisseret.

4e Section.

Président, M. Verriest.
Vice-Présidents, R. P. Hahn et M. Cuylits.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. Paul de Gerlache.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Ch. Thiebauld.
Secrétaire, M. Léon De Lantsheere.

BUREAUX DES SECTIONS.

1885 - 1886.

1re Section.

Président, M. Pasquier.
Vice-Présidents, MM. d'Ocagne et Ch. Lagasse.
Secrétaire, M. Alb. Van Biervliet.

2e Section.

Président, R. P. Van Tricht.
Vice-Présidents, MM. l'abbé de Lorge et G. Bruylants.
Secrétaire, M. le Bon Alb. de Fierlant.

3e Section.

Président, M. G. Dewalque.
Vice-Présidents, MM. Delgeur et Dollo.
Secrétaire, M. Buisseret.

4e Section.

Président, M. Verriest.
Vice-Présidents, R. P. Hahn et M. Cuylits.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. Paul de Gerlache.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Ch. Thiebauld.
Secrétaire, M. Léon De Lantsheere.

SESSIONS DE 1884-1885

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

La Société a tenu trois sessions pendant cette neuvième année:

La première, le jeudi 30 octobre 1884;

La seconde, le jeudi 29 janvier 1885;

Et la troisième, le lundi 13, le mardi 14, le mercredi 15 et le jeudi 16 avril 1885.

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section.

Jeudi, 30 octobre 1884. — M. le C[te] de Sparre envoie un mémoire : *Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et le mouvement du pendule conique* (voir 2[e] partie, pp. 49 et suiv.).

M. Gilbert présente au nom de M. d'Ocagne une *Note sur la transformation des propriétés barycentriques.*

M. Le Paige est nommé commissaire.

M. Gilbert communique à la section *Une démonstration nouvelle de l'équation fondamentale de la théorie de la chaleur.*

Le P. Carbonnelle et le P. Delsaulx sont nommés commissaires.

Rapport de M. Gilbert

sur le travail de M. Mansion intitulé : *Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire.*

Dans ce mémoire, dont quelques parties ont déjà été livrées à la publicité, M. Mansion s'est proposé d'établir, sans sortir des

considérations élémentaires, le développement de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire, et d'en faire l'application aux fonctions élémentaires e^z, $\sin z$,... définies sans l'emploi des séries, mais particulièrement à $l.(1+z)$ et $(1+z)^m$ [z et m étant imaginaires], ce qui offre les difficultés spéciales quand le module de z est égal à l'unité. Dans la pensée de l'auteur, la valeur de son travail réside plus dans le point de vue didactique que dans les résultats nouveaux qui s'y trouvent; car, sans parler des théories récentes sur lesquelles je reviendrai plus loin, on sait que dès 1829, dans ses *Leçons de calcul différentiel* (XIe, XIIe et XIIIe leçons), Cauchy avait défini avec précision les fonctions élémentaires d'une variable complexe et établi, pour les fonctions d'une telle variable qui satisfont à certaines conditions, des formules équivalant à celle de Taylor. Seulement, dans la pensée de Cauchy, l'idée d'une fonction de variable complexe n'avait pas pris sa forme définitive; elle implique une certaine condition, vérifiée dans les fonctions élémentaires définies par Cauchy, mais sur laquelle il ne s'est expliqué que beaucoup plus tard (1846). Il tire de la formule de Taylor pour les fonctions réelles le développement pour le cas des variables imaginaires, avec une expression du *reste* de la série dans laquelle entrent deux quantités inconnues θ_1 et θ_2, comprises entre zéro et l'unité. C'était une première solution; mais Cauchy, dans son livre, n'a pas fait l'application de son théorème aux fonctions $l.(1+z)$ et $(1+z)^m$ dans les cas difficiles.

Le but poursuivi par Abel dans son célèbre mémoire sur le binôme (*) est beaucoup plus restreint. Après quelques théorèmes généraux sur les séries, Abel considère directement la série

$$1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\dots,$$

détermine ses conditions de convergence et cherche la fonction de m et de z qu'elle représente. Par une analyse très ingénieuse,

(*) *Journal de Crelle*, t. I. — Œuvres d'Abel, 2e éd., t. I, p. 219.

mais compliquée, fondée sur les propriétés de la fonction, il arrive à reconnaître le développement de $(1+z)^m$, m et z étant réels ou imaginaires. Il déduit de cette formule un grand nombre de résultats demeurés célèbres et, par un artifice très curieux, montre dans quels cas la série est applicable lorsque mod. $z=1$. Malheureusement, malgré la préoccupation évidente de rigueur que le grand géomètre norwégien a apportée dans la rédaction de son travail, il s'y est glissé des fautes, notamment dans la démonstration du théorème V, qui implique certaines restrictions en relation étroite avec la notion des séries équiconvergentes.

Dans l'ordre d'idées de M. Mansion, j'ai surtout à signaler le mémoire fort remarquable publié en 1876 par M. Darboux (*), qui s'est élevé à des considérations très générales en étendant la formule de Taylor aux fonctions de variables complexes. Un lemme géométrique à peu près évident lui donne immédiatement une formule fort importante, exprimant le rapport des accroissements de deux fonctions d'une variable complexe, et généralisant la formule connue

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}.$$

Un cas particulier de ce théorème lui fournit, par la même voie et avec la même facilité que pour les variables réelles, la série de Taylor avec diverses expressions du reste. Ce que ces expressions offrent de remarquable, c'est qu'elles renferment comme les autres (Cauchy, Mansion) deux quantités inconnues à module compris entre zéro et 1, *mais dont l'une figure en facteur* et l'autre seulement sous le signe fonctionnel.

Au point de vue de l'élégance, c'est là un avantage, et dans l'application aux fonctions particulières, cet avantage doit se maintenir, au moins dans certains cas ; mais M. Darboux ne s'est pas arrêté aux détails de cette application ni à la démonstration

(*) *Journal de mathématiques* de M. Resal, 1876, p. 291.

des résultats d'Abel, se contentant de les mentionner. C'est, au contraire, par la richesse et la généralité des résultats que son mémoire me semble digne d'être étudié. Généralisant une formule de calcul intégral bien connue, puis remplaçant, dans la démonstration de la série de Taylor, la fonction $(t-1)^n$ par un polynôme entier de degré n, M. Darboux établit une formule très générale pour le développement de $f(x+h)-f(x)$, avec le reste sous forme d'intégrale définie. Cette formule lui donne, comme cas particulier, la célèbre série de Maclaurin ou d'Euler avec diverses expressions du reste, entre autres celle-ci :

$$\frac{(-1)^{n-1}\lambda h^{2n+1}B_n}{1\,.\,2\ldots n}f^{2n+1}(x+\theta h),$$

B_n désignant les nombres de Bernoulli, λ un facteur à module < 1. Il déduit encore de son théorème général diverses formes de développement connues ou nouvelles, et je pense qu'il n'a pas épuisé la série des résultats intéressants qu'on en peut tirer.

J'arrive au travail qui nous est soumis. C'est aussi par un théorème général, extension de celui de Lagrange, que débute le mémoire. Après avoir défini exactement ce qu'il entend par une fonction d'une variable imaginaire $z = x + yi$,

$$u = F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

et rappelé certaines propriétés de ces fonctions, M. Mansion montre que si $F(z)$, $F'(z)$ sont fonctions continues de z sur la droite $y = ax + b$, z_0 et Z étant deux points de cette droite, on aura

$$F(Z) - F(z_0) = (Z - z_0)F'(z),$$

en entendant que dans la partie réelle du deuxième membre on remplace z par z_1, dans la partie imaginaire z par z_2, z_1 et z_2 se rapportant à deux points inconnus compris entre z_0 et Z. Appliquée à la fonction bien connue que l'on emploie d'habitude pour démontrer la série de Taylor, cette équation conduit à l'expression du reste de cette série, sous la forme

$$\mathfrak{R}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_1)^{n-p}f^n(z_1)+\mathfrak{J}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_2)^{n-p}f^n(z_2),$$

ou l'on a

$$z_1 = z_0 + \theta_1 (Z - z_0), \qquad z_2 = z_0 + \theta_2 (Z - z_0).$$

Ici figurent donc encore deux inconnues θ_1 et θ_2, mais toutes les deux sous le signe fonctionnel. Les formes habituelles du reste répondent à $p = n$, $p = 1$, et l'application de ces formes à l'étude de la convergence du reste vers zéro, dans les fonctions élémentaires, remplit la deuxième partie du mémoire.

Les fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{Ch}\, z$, $\mathrm{Sh}\, z$ ne donnent lieu à aucune difficulté. Pour la fonction $l.(1+z)$, la discussion montre que, si $z = re^{\omega i}$, la série est toujours convergente si $r < 1$, divergente si $r > 1$; et que, si $r = 1$, la série est convergente pour toute valeur de ω, sauf $\omega = \pi$; mais l'expression du reste ne donne pas immédiatement ce résultat si $\cos \omega < 0$, il faut recourir au développement de $(1+z)\, l.(1+z)$, artifice ingénieux analogue à celui d'Abel dans la série du binôme. Les séries réelles, très importantes, que l'on tire de ces séries imaginaires, sont développées par M. Mansion.

L'auteur définit ensuite la fonction $(1+z)^m$ pour z et m imaginaires; il développe cette fonction (série de Newton) par la formule de Maclaurin, donne les deux expressions du reste et discute ensuite la question de convergence. Une condition à laquelle la série doit satisfaire lui montre d'abord que r doit être < 1, ou, s'il est égal à 1, il faut que la partie réelle de $m+1$ soit positive. Je pense que ce passage admettrait quelques simplifications. M. Mansion examine ensuite les différents cas que comportent les valeurs de r et de ω et démontre que la série est applicable si $r < 1$; et encore, si $r = 1$ avec $\mathfrak{R}(m+1) > 0$, $\cos \omega$ étant > -1; enfin, pour $z = -1$ si $\mathfrak{R}(m) > 0$. Il fait usage, dans un cas, de l'artifice d'Abel.

Dans une sorte d'appendice, M. Mansion met le reste de la formule de Taylor sous la forme

$$\int_{z_0}^{z} \frac{(Z-t)^{n-1} f^n(t)\, dt}{1.2\ldots(n-1)},$$

et, en s'appuyant sur un lemme qu'il démontre, arrive à l'expres-

sion du reste donnée par M. Darboux. Il termine par un historique de la question.

Le mémoire de notre savant confrère atteint parfaitement son but. Il rendra de grands services aux professeurs qui visent à introduire, dans la partie élémentaire du calcul différentiel, l'étude des fonctions usuelles d'une variable imaginaire; car il est à la fois très clair, très simple et, sauf peut-être un certain point, très rigoureux. « Surtout la partie relative à la série du binôme, comme le dit fort bien M. C. Jordan, est parfaitement discutée et d'une manière infiniment plus simple que celle d'Abel. » C'est donc là un excellent travail dont nos *Annales* s'enrichiront, je l'espère.

Mon savant confrère me permettra cependant de ne pas partager absolument son opinion en ce qui concerne l'étude générale des fonctions d'une variable imaginaire. Les critiques qu'il adresse à la démonstration du célèbre théorème de Cauchy sur les intégrales des fonctions synectiques me semblent, en ce qui concerne du moins celle de Riemann, assez peu fondées. D'ailleurs, il se trouvera bien plus tard quelque démonstration simple et rigoureuse de ce principe fondamental, et sans être parvenu à vaincre certaines difficultés, il me semble entrevoir le chemin par lequel on y arrivera. Mais mon opinion est que, tôt ou tard, la théorie générale des fonctions descendra dans l'enseignement élémentaire, sous la forme que Cauchy lui a donnée en dernier lieu, sans qu'on se préoccupe du réel ou de l'imaginaire, et rendra moins utiles certaines théories de *transition* qui sont aujourd'hui encore fort précieuses.

Le mémoire de M. Mansion est publié plus loin (2e partie, pp. 1 et suiv.)

Jeudi, 29 janvier 1885.— M. Gilbert fait hommage à la section d'un *Mémoire sur la théorie du potentiel* inséré au *Journal de Liouville.*

M. Gilbert présente une note *Sur la généralité de l'intégrale dans les équations linéaires aux dérivées partielles du 1er ordre.* M. Mansion est nommé commissaire. (Voir 2e partie, p. 41.)

M. Gilbert fait connaître, d'après les récents travaux de M. de Sparre, la vraie forme de l'herpolodie.

M. Mansion présente quelques considérations sur le principe de substitution des infiniment petits.

Lundi, 13 avril 1885. — M. Baule envoie une note où il montre la possibilité de résoudre ce problème : *Étant donné le port de construction d'un navire, déterminer l'orientation de son chantier.*

La théorie de la régulation des compas ou boussoles marines, aidée des excellents instruments de sir W. Thomson, permet de mesurer les forces magnétiques provenant du navire qui, indépendamment des forces terrestres, agissent sur le compas. Ces forces perturbatrices, très considérables sur les navires en fer, proviennent de deux sources distinctes :

1° Des fers restés doux ou à peu près doux, dont l'aimantation varie par suite avec l'orientation du navire et sa position sur le globe ;

2° Des fers qui ont atteint un état d'aimantation à peu près stable. Les forces qui en proviennent sont sensiblement constantes et constituent ce que l'on appelle le magnétisme permanent ou sous-permanent.

Il est naturel de supposer que ce magnétisme a été contracté pendant la construction, alors que le martelage nécessité par la mise en place des rivets ou autres opérations analogues déterminait, dans diverses pièces de fer, une aimantation correspondant à leur orientation. La direction du chantier doit donc avoir une influence marquée sur les propriétés magnétiques du navire. D'après les résultats obtenus à bord du paquebot *Niger* des Messageries maritimes, cette influence semblerait prépondérante.

Pour déterminer séparément les forces dues au fer doux et au magnétisme permanent, il est nécessaire de recueillir des observations dans divers parages où les conditions magnétiques terrestres sont très différentes. Les voyages réguliers qu'effectue le *Niger*, depuis six mois, de part et d'autre de l'équateur

magnétique, m'ont donc permis d'observer mes boussoles dans des conditions favorables. En désignant, pour plus de clarté, par

P, la composante horizontale du magnétisme permanent qui attire *vers l'avant* le *pôle nord* de l'aiguille aimantée,

Q, la composante horizontale qui attire le même pôle vers *bâbord,*

j'obtiens (l'unité étant la force horizontale à Greenwich), pour le compas n° 1 :

$$P = +\ 0{,}098, \quad Q = +\ 0{,}255.$$

La résultante de ces deux forces fera donc, avec l'axe longitudinal du navire, un angle compté de l'avant vers *bâbord*

$$\text{arc.tg}\,\frac{Q}{P} = 69^{\circ}.$$

Or, si on suppose la direction de cette résultante tracée sur le pont, et si l'on reporte, par la pensée, le navire sur son chantier, cette direction *coïncidera à trois degrés près* avec le méridien magnétique. L'orientation du chantier est, en effet, S72O magnétique.

Pour la boussole n° 2 :

$$P = +\ 0{,}031, \quad Q = +\ 0{,}148, \quad \text{arc.tg}\,\frac{Q}{P} = 78^{\circ}.$$

La coïncidence ne serait plus qu'à six degrés près ; mais il faut tenir compte de ce que la boussole n° 2, beaucoup plus élevée au-dessus du pont, est moins soumise à l'influence de la masse du navire, et, par contre, l'est beaucoup plus à celle d'une passerelle garnie de fer, construite tout récemment, c'est-à-dire plusieurs années après le lancement du *Niger*.

Une pareille coïncidence n'a jamais été signalée, que je sache, sur aucun bâtiment ; je me garderais donc bien de lui attribuer une généralité qui ne pourrait être établie que par des vérifications nombreuses et obtenues avec des compas bien placés, c'est-à-dire éloignés, comme ceux du *Niger*, de toute masse de fer considérable. Je me borne donc à constater un fait que

je crois de nature à attirer l'attention des navigateurs ou des ingénieurs qui s'occupent de l'importante question des boussoles marines.

M. Gilbert expose *Une généralisation du théorème de Kœnig sur la force vive.*

M. Mansion présente *Une démonstration élémentaire du théorème de Darboux.*

M. Gilbert fait connaître d'après les travaux de M. Mannheim une construction géométrique de l'herpolodie.

Mercredi, 15 avril 1885.— M. Mansion présente un mémoire de M. De Tilly *Sur une lacune qui semble exister au commencement de la géométrie descriptive.* D'accord avec M. Mansion, la section propose l'insertion de ce travail aux *Annales.* (Voir 2e partie, p. 95.)

M. Gilbert fait *Une rectification au calcul de M. Helmholtz concernant la conservation de la chaleur solaire.*

M. d'Ocagne développe les considérations suivantes au sujet des courbes qu'il appelle *isométriques.*

« Considérons deux systèmes (C) et (K) de courbes planes, et supposons que les arcs découpés sur toutes les courbes K, par deux quelconques des courbes C, soient égaux entre eux. Nous dirons que les courbes K sont des *trajectoires isométriques* du système (C).

» Le système (C) étant donné, on pourra évidemment former pour ce système une infinité de systèmes de trajectoires isométriques; on peut, en effet, se donner arbitrairement une courbe K_1 dans le système (K); les autres courbes K s'en déduisent, et nous dirons que celles-ci sont les *isométriques de la courbe* K_1 *par rapport au système* (C).

» Le cas le plus simple et aussi le plus intéressant est celui où la courbe K_1 est une droite. L'étude de ce cas fait l'objet d'un travail que nous avons donné au *Bulletin de la Société mathématique de France.*

» Nous démontrons dans ce travail, ce qui d'ailleurs est très facile, que le problème dépend d'une équation différentielle du premier ordre et du second degré et nous intégrons cette équation dans plusieurs cas.

» Qu'il nous soit permis de citer un de nos résultats. Soit (C) un système formé par les positions successives d'une courbe invariable glissant parallèlement à une droite D; nous disons qu'un tel système est *parallèle à la droite* D. Le système (C′) orthogonal au premier est aussi parallèle à D. Le lieu du milieu d'une corde parallèle à D et dont les extrémités glissent respectivement sur une courbe C et une courbe C′ est une courbe K; le système des courbes K est également parallèle à D; nous l'appelons *système moyen* des deux premiers. Cela posé, nous énoncerons ainsi le premier des théorèmes que nous avons obtenus :

» *Si les systèmes* (C) *et* (C′), *parallèles à la droite* D, *sont orthogonaux entre eux, le système moyen* (K) *de* (C) *et* (C′) *est isométrique de la droite* D *par rapport à l'un ou à l'autre de ces deux systèmes.*

» En particulier, si la courbe C est une parabole ayant la droite D pour axe, la courbe C′ est une logarithmique ayant cette droite pour asymptote, et la courbe K est la fameuse *courbe du chien,* en supposant que le maître parcoure la droite D et que le chien ait à chaque instant la même vitesse que son maître.

» Notre mémoire contient ensuite plusieurs cas d'intégration où nous introduisons les fonctions elliptiques sous la forme de la fonction p (u) de M. Weierstrass, dont l'importance a été affirmée, en outre des travaux du grand géomètre, par les recherches de MM. Kiepert. Mittag-Leffler, Halphen, etc. Parmi les problèmes traités à cet endroit, nous signalerons le suivant : *Trouver les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes.* On voit que la loi de rectification des courbes ainsi définies est une des plus simples qui se puissent imaginer. Soit, en effet, C l'une des isométriques de la droite D par rapport au système des droites qui passent par un point O;

si A et B sont deux points de la courbe C et que l'on tire les droites OA et OB qui coupent la droite D aux points *a* et *b*, la longueur de l'arc AB de la courbe C est égale à la longueur du segment de droite *ab*.

» Nous nous bornerons à ces rapides indications sur les questions que nous avons résolues, mais nous y ajouterons quelques remarques. La considération des isométriques donne naissance à beaucoup d'autres problèmes intéressants sur lesquels nous nous proposons de revenir, si nous en avons le loisir; en premier lieu celui-ci :

Trouver deux systèmes de courbes qui soient chacun isométrique par rapport à l'autre, ou, si l'on veut, isométriques réciproques.

» Ce problème semble assez difficile, mais il devient bien plus ardu quand on l'étend aux surfaces, et voici comment :

» Soient (S), (S') (S″) trois systèmes de surfaces; prenons deux surfaces du système (S'), S'_1 et S'_2, et deux surfaces du système (S″), S''_1 et S''_2. Ces quatre surfaces déterminent sur chaque surface S une aire limitée à quatre courbes. Si les aires ainsi déterminées sur les surfaces S sont toutes égales entre elles (quelles que soient d'ailleurs les surfaces S'_1, S'_2, S''_1, S''_2 choisies dans les systèmes (S') et (S″)), le système (S) sera dit *isométrique* par rapport aux systèmes (S') et (S″).

» Le problème qui consiste à *trouver trois systèmes de surfaces tels que chacun d'eux soit isométrique par rapport aux deux autres* est, croyons-nous, digne de tenter les efforts des géomètres les plus exercés.

» On peut aussi se poser le problème des isométriques pour les courbes tracées sur une certaine surface, ou encore rechercher les courbes gauches, trajectoires isométriques d'un système de surfaces donné..... Il y a là toute une mine de questions délicates qui ne semble pas avoir été exploitée, de l'avis même d'un maître éminent, M. Ossian Bonnet, à qui nous avons communiqué notre premier essai dans cette voie. »

Une discussion sur les nombres incommensurables termine la séance.

Jeudi, 16 avril 1885. — M. l'abbé Gelin fait connaître *Une méthode de division abrégée.*

M. Gilbert présente une note de M. Mansion sur une question de mécanique et demande à l'examiner.

M. d'Ocagne communique à la section la solution d'un problème de géométrie. La section propose l'insertion de ce travail aux *Annales*. (Voir 2e partie, p. 231.)

M. Gilbert présente une note *Sur un problème de combinaisons.*

La section procède à l'élection d'une Commission chargée de préparer la question à mettre au concours. Sont nommés :

MM. Pasquier, Mansion et Gilbert.

Il est procédé au dépouillement du scrutin pour l'élection du bureau, qui se trouve ainsi constitué :

Président,	MM. Pasquier.
Vice-Présidents,	d'Ocagne et Ch. Lagasse.
Secrétaire,	A. Van Biervliet.

Deuxième Section.

—

Jeudi, 30 octobre 1884. — M. Schmitt, professeur à la Faculté catholique des sciences de Lille, à la suite d'expertises ordonnées par le parquet, a été conduit à faire de nombreuses analyses de beurre comestible, notamment en vue de reconnaître la présence de la margarine. Les caractères physiques sont insuffisants. L'analyse pour le dosage des acides gras volatils et solubles ou fixes et insolubles ne donne pas de résultats satisfaisants. Reste l'analyse immédiate, qui constitue le meilleur procédé. On dissout les matières grasses par des essences de pétrole et on dose le sel, le sucre, etc.

Le point de fusion du beurre varie de 36° à 38°. La présence d'une quantité notable de margarine fait monter le point de fusion à 40°.

La détermination de la quantité d'eau contenue dans le beurre

sence de végétation rendaient plus facile l'action du nivellement.

Cette communication donne lieu à un échange d'observations entre MM. G. Dewalque, Delgeur, Swolfs, Dollo et de Limburg-Stirum.

La section engage l'auteur à poursuivre ses intéressantes recherches de manière à en faire l'objet d'un travail complet.

M. Oomen communique la note suivante sur un cas de longévité de l'*Agave Americana*.

Note de M. Oomen.

Le 28 juin 1882, j'ai pendu dans une salle très sèche une espèce d'*Agave Americana* avec les racines. C'était une plante âgée de 5 à 6 ans. La première année, la plante resta fraîche et continua à croître. C'est seulement à la fin de la seconde année que quelques feuilles commencèrent à jaunir ; la feuille enroulée du milieu restait toujours verte et saine.

Enfin, le 14 octobre 1884, j'ai constaté que la plante était totalement morte.

Ainsi la plante a pu vivre sans terre et sans humidité pendant 2 ans et 106 jours.

Rapport de M. de la Vallée Poussin

sur une note de M. le Cte Ad. de Limburg-Stirum, relative à des dépôts littoraux des environs de Bruxelles.

« Les observations de M. de Limburg-Stirum relatives à certaines couches coquillières éocènes étudiées par lui dans le Brabant me paraissent très intéressantes à faire connaître : et j'en propose volontiers l'impression dans les *Annales* de la Société scientifique. Je propose aussi la publication de la feuille de coupe qui accompagne ce travail et qui met en parallèle la série des dépôts tertiaires dans les deux vallées de la Senne et de la Geete. »

La note de M. de Limburg-Stirum est insérée à la 2e partie, pp. 305 et suivantes.

Jeudi, 29 janvier 1885. — M. de la Vallée Poussin lit le travail suivant, sur les couches à *Acervularia* des environs de Chaudfontaine et d'Embourg.

***Note sur les couches à* Acervularia.**

Les massifs de calcaires dévoniens des environs de Chaudfontaine et d'Embourg sont teintés comme calcaires de Givet sur les cartes géologiques de Dumont. M. Gosselet les a indiqués comme appartenant à la série de Frasnes ([1]). Il en est ainsi, en effet, pour la majeure partie de ces calcaires. Les couches supérieures sont remarquables par l'abondance des polypiers du genre *Acervularia.* On peut les étudier dans les carrières actuellement exploitées à côté de la route de Chaudfontaine à Nimane, comme aussi dans les excavations plus anciennes qui sont situées sur le plateau d'Embourg à l'est et à l'ouest de la route d'Aywaille, et également au pied des beaux escarpements qui bordent la rive droite de l'Ourthe vis-à-vis de Colonstère. Les ondulations répétées du système dévonien dans cette région ramenèrent au jour à plusieurs reprises les bandes à *Acervularia.* En explorant les excavations situées au sud-est du hameau de Trihay, où les couches se succèdent avec régularité, on voit qu'il existe au moins deux zones principales de couches à *Acervularia,* qui sont séparées par 8 à 10 mètres de calcaires de structures diverses, les uns massifs, traversés de veines spathiques, à stratification souvent peu distincte, parfois dolomitiques, les autres formés de couches minces soudées entre elles et présentant un aspect stratocompacte. Dans ces couches intermédiaires, on rencontre des Stromatopores, des Favosites et des Pachypora, quelques Spirifères, et aussi des traces d'algues à étui calcaire rappelant un peu nos Corallines.

La zone à *Acervularia,* qui surmonte les couches précédentes, commence aussi par des bancs stratocompacts, qui ont fourni de bonnes pierres de taille et qui reparaissent souvent dans les

---

([1]) *Esquisse géologique du nord de la France,* p. 100.

travaux d'art entrepris pour la construction du chemin de fer de Verviers. Ces couches de calcaire à peu près pur sont surmontées à leur tour par des couches plus feuilletées, schisto-noduleuses, où les éléments argileux s'associent au calcaire dans des proportions plus ou moins considérables, et où persistent néanmoins la plupart des polypiers et notamment les *Acervularia* avec la même abondance qu'auparavant.

L'aspect de ces bancs est très caractéristique. On sait que les *Acervularia* constituent des zoanthaires composés, formant des plaques acquérant depuis moins de 1 centimètre jusqu'à 75 ou 80 millimètres d'épaisseur. Ces plaques sont aisées à reconnaître, même au milieu des bancs les plus massifs, par suite de la cassure finement saccharoïde qui leur est propre comme à la plupart des polypiers paléozoïques. Elles y sont distribuées en lentilles, en lits interrompus, généralement séparés verticalement par de faibles intervalles qui peuvent être comblés par un calcaire à grains serrés et compact, et il en résulte une bonne pierre d'appareil. Mais d'autres fois ces lits de polypiers sont enveloppés et comme noyés dans une masse calcaréo-schisteuse d'un gris noirâtre très foncé, par suite des matières charbonneuses qui l'imprègnent quand elle n'a pas été exposée très longtemps à l'air, et ce mode de stratification se prolonge sur de grandes étendues en conservant partout une puissance de plusieurs mètres.

La spécification des diverses formes d'*Acervularia* laisse encore à désirer.

Ferdinand Rœmer, dans son dernier ouvrage, paraît abandonner une partie des espèces établies autrefois par son frère Friedrich dans la grande monographie des fossiles dévoniens du Hartz insérée dans la *Palaeontographica* de Duncker et Meyer (1). Les localités que j'ai parcourues aux environs de Chaudfontaine et d'Embourg m'ont fourni les deux espèces désignées comme *Acervularia pentagona* et *A. Davidsoni* (Edwards et Haime), dans le dernier fascicule publié par F. Rœmer de la *Lethæa*

(1) *Beiträge zur geologischen Kenntniss des Nordwestlichen Harzgebirge,* Dritte Abt., pp. 30-33, 1855.

geognostica ([1]). Je n'ai pas observé l'espèce à plus grands calices, nommée *A. Goldfussii* par les mêmes auteurs, bien qu'elle ait été signalée en Belgique sur le même horizon par plusieurs savants ([2]).

Quelle que soit la nature lithologique de la zone qu'ils caractérisent, ces polypiers y sont associés à d'autres familles de la même classe, en particulier aux *Alvéolites*, qui se sont servis fréquemment des *Acervularia* comme d'une base pour édifier leurs constructions pierreuses. *Alveolites suborbicularis* (Edw. et Haime) se rencontre assez souvent en incrustation sur l'autre type de polypier. Il est remarquable que les uns et les autres ne paraissent pas avoir souffert du changement qui s'opérait au fond de la mer dévonienne dans la nature des sédiments pendant qu'ils florissaient ; car leurs agrégations sont aussi nombreuses, aussi serrées quand elles sont entrelacées dans les feuillets d'une roche calcaréo-argileuse ou marneuse que lorsqu'elles sont enchâssées dans du calcaire compact. Ce sont précisément ces bancs en grande partie formés de polypiers qui sont exploités pour la confection des chaux hydrauliques dans les carrières établies le long de la route de Chaudfontaine à Nimane, tandis que les bancs intermédiaires où les Zoanthaires sont plus clairsemés ne fournissent pas cette qualité de chaux. Il en va de même de la zone sous-jacente aux bancs intermédiaires ; elle est remplie des mêmes coraux que la zone supérieure, en possède habituellement à un haut degré la structure nodulo-schisteuse et elle est employée aux mêmes usages.

Il faut conclure de ces circonstances que la parfaite limpidité des eaux marines n'était pas la condition indispensable au développement de certaines familles de polypiers paléozoïques. Des eaux tenant en suspension des particules terreuses ne les empêchaient pas de prospérer dans certains cas. Des faits semblables

---

([1]) *Lethæa palæozoica*, Stuttgard, 1883, pp. 352-353.

([2]) G. Dewalque, *Prodrome*, etc., p. 318. — Mourlon, *Géologie de la Belgique*, t. II, pp. 16 et suiv. La figure donnée dans l'atlas de M. Gosselet (*Esquisse*. Atlas, pl. IV, fig. 20) comme *Acervularia Davidsoni* (Edw. et H.) ne peut appartenir à ce genre et ne ressemble pas à l'espèce de F. Rœmer.

à ceux que je viens d'indiquer se retrouvent en beaucoup d'autres points de l'étage dévonien de Frasnes, soit dans la bande de Rhisnes comme à Huccorgne et sur le territoire d'Émines, soit dans le bassin de Dinant comme, entre autres, à Profondville et dans les environs de Givet. C'est un fait assez général. Il s'accuse d'une manière au moins aussi frappante dans la série de Couvin, laquelle, comme on sait, est très antérieure à celle de Frasnes, mais qui s'en rapproche, au point de vue lithologique, par un mélange intime des nodules et des lentilles calcaires aux sédiments argilo-schisteux. On peut observer, par exemple dans les belles tranchées des environs d'Aubrives (département des Ardennes), que les amas d'Héliolithes, de Favosites, d'Alvéolites, de Cyathophyllines y sont parfois étrangement entremêlés à des feuillets schisteux. Il arrive que ces feuillets schisteux se retrouvent au milieu de masses calcaires ayant jusqu'à plusieurs mètres cubes et constituées par des colonies de Stromatopores. En voyant ces sortes de lentilles marneuses ou de membranes argileuses enveloppées en quelque sorte dans un rocher construit par des Stromatoporides, il est bien difficile de ne pas admettre que, pendant la durée d'une même colonie de ces petits êtres, il arrivait des moments où l'eau se troublait plus ou moins, sans entrainer forcément la ruine de la république.

Nous savons d'ailleurs que des faits ayant de l'analogie se passent aujourd'hui chez les principales tribus d'Actinozoaires formant des récifs. L'accroissement des massifs édifiés actuellement, dans les mers tropicales, par une même colonie de Madrépores, d'Astrées ou de Porites n'est pas absolument arrêté par une précipitation dans des eaux troubles. Certaines portions de l'agrégation et surtout le sommet périssent, tandis que les côtés continuent de vivre. On connait même, chez les Fungides, des cas où un seul individu à large disque périt d'un côté sous l'action des eaux troubles, mais résiste de l'autre côté (1).

Nonobstant ces faits, les relations habituelles des polypiers composés de l'époque dévonienne avec les fonds limoneux

---

(1) Conf. J. DANA, *Corals and coral Islands*, pp. 120-121.

nous paraissent prouver chez ces organismes des aptitudes d'accommodation et une résistance que l'on n'a pas constatées, à beaucoup près, au même degré chez les Actinozoaires vivants. Cette conclusion paraît encore mieux appuyée si l'on remarque, à propos de l'étage de Couvin, que, sur des zones puissantes, les blocs corallaires y sont distribués à toutes les hauteurs, et que, à côté de ces blocs, comme au-dessus et au-dessous d'eux, se trouvent des lits réguliers de schiste argilo-marneux, où fourmillent des spécimens calcaires de Brachiopodes, de Fenestelles, mêlés à des Gastropodes, à des Lamellibranches, à des Céphalopodes et à beaucoup de polypiers sporadiques. Il en ressort évidemment que la fixation par les organismes du carbonate de calcium dissous dans les eaux marines marchait de pair avec la précipitation des matières détritiques; et, le fait étant accordé sans difficulté pour les mollusques, nous ne voyons pas comment il pourrait être nié pour les corallaires.

Les circonstances étant telles, on ne peut accepter au pied de la lettre, du moins à propos de certains Anthozoaires de l'ère primaire, la maxime suivant laquelle les formations corallines exigent des eaux limpides et sont incompatibles avec des dépôts limoneux. Dans l'état des connaissances, cette assertion est à très peu de choses près acceptable pour les organismes qui construisent actuellement des récifs ; mais elle comporte des restrictions sérieuses si on l'applique aux Zoanthaires des périodes très anciennes. Dans cette différence du passé et du présent, comme dans la non distinction, aux temps anciens, des coraux de récifs et des coraux de mers profondes, et dans l'association à la même époque des bancs de polypiers à des coquilles fragiles, incapables de résister à de violents coups de mer, telles que sont celles de beaucoup de Brachiopodes, nous voyons des difficultés qui ne sont pas résolues. Elles doivent être prises en considération dans l'interprétation des étages à polypiers trouvés dans les anciennes formations du sol belge, et dans le jugement à porter sur les tentatives récentes où l'on cherche à éclairer l'histoire des anciens récifs en partant des phénomènes qui se passent actuellement dans l'océan Pacifique.

M. Dollo fait plusieurs communications paléontologiques.

M. le D[r] Delgeur expose, au point de vue géographique, les opérations de la Conférence du Congo.

Lundi, 13 avril 1885. — M. l'abbé G. Smets, docteur en sciences naturelles, donne lecture de quelques observations faites sur le *Balœnoptera Sibbaldii.* Ce travail donne lieu à un échange d'observations entre MM. Dollo et Smets. La section propose l'impression aux *Annales* du mémoire de M. l'abbé Smets. (Voir 2[e] partie, pp. 187 et suiv.)

Le R. P. Van den Gheyn fait diverses communications sur des points de linguistique et d'ethnographie.

Mardi, 14 avril 1885. — M. Dollo démontre l'homodynamie des chevrons et des hypapophyses. Ce travail donne lieu à une discussion entre MM. Dollo et Smets.

M. Charlier expose les procédés dont il use pour mouler les fossiles et spécialement les fossiles végétaux; M. Dollo fait observer que sa méthode ne peut être appliquée à la reproduction des fossiles animaux; car on ne peut ni les humecter, ni les mettre en contact avec un corps chaud.

Il est procédé à l'élection du bureau de la section pour l'année 1885-1886. Sont élus :

Président,	MM. G. DEWALQUE.
Vice-Présidents,	DELGEUR et DOLLO.
Secrétaire,	BUISSERET.

M. l'abbé Bourgeat, professeur aux Facultés catholiques de Lille, envoie un travail sur le néocomien du haut Jura français. La section désigne M. G. Dewalque comme commissaire.

Jeudi, 16 avril 1885. — M. G. Dewalque, rapporteur, conclut dans les termes suivants à la publication dans les *Annales* du mémoire de M. Bourgeat :

« J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le mémoire de notre honorable confrère sur la géologie du haut Jura. Ce mémoire, qui a

exigé un grand travail sur le terrain, est fort bien fait et il apportera un important contingent à nos connaissances sur cette région, particulièrement sur sa stratigraphie. C'est dire que j'en propose très volontiers l'impression dans les *Annales* de la Société. »

A propos d'un article publié par le *Cosmos* (n° du 9 février 1885) et intitulé : *L'Audition colorée,* le R. P. Van den Gheyn fournit à la section quelques détails complémentaires sur les phénomènes physico-psychiques signalés dans le travail.

Il rappelle d'abord brièvement les recherches de MM. Bleuler, Schmann, Ughetti et Lussana sur les relations particulièrement intimes qui,chez certaines organisations,tendent à faire confondre les sensations du son et de la couleur. Pour bien des personnes, parait-il, un son entendu produit sur les organes une sensation de couleur. Chose étrange, le phénomène se présente généralement dans des conditions de si parfaite régularité que les mêmes voyelles répondent à une même couleur déterminée, non seulement chez les mêmes individus, mais chez des sujets différents. Ainsi presque toujours l'*a* éveille la perception de la couleur noire; l'*i*, celle du rouge; l'*o*, celle du blanc; l'*e*, celle du jaune.

Ce phénomène est moins rare qu'on ne le pense. Sur 596 personnes examinées, les Drs Bleuler et Schmann en ont trouvé 75, soit 12,5 °/₀, qui offraient cette anomalie.

Ces observations ont été faites surtout en Italie et en Allemagne, mais le R. P. Van den Gheyn a pu les constater lui-même d'une manière très frappante sur un sujet qui jouit de cette étonnante propriété de l'audition colorée. Sans avoir été aucunement prévenu que d'autres éprouvaient le même phénomène, ce sujet a été prié de mettre ses impressions par écrit, et voici le résumé qu'il en a rédigé. On verra que les faits concordent d'une manière étonnante avec ceux qui ont été signalés dans l'article du *Cosmos.*

« Les voyelles d'un mot prononcé devant moi produisent invariablement sur l'organe de la vue la sensation d'une couleur

toujours la même. Ainsi, que j'entende dire le mot *particulière*, aussitôt je vois défiler devant mes yeux une série de teintes disposées dans l'ordre suivant : rouge foncé, noir, violet, noir, jaune clair brillant, jaune mat. Autre exemple : le mot *régularité* me fait voir du jaune clair brillant, du violet foncé, du rouge, du noir, du jaune clair brillant.

» Les premières perceptions de cette singulière affection remontent au temps où je maniais mes premiers abécédaires ou du moins à l'époque de mes premières lectures. Je me souviens parfaitement que, tout jeune enfant, les premiers sons auxquels j'ai pu réfléchir étaient ceux de la langue hollandaise et que la lettre qui me frappa le plus était le *ij* (*aï*). Elle me fait voir un splendide vert de France avec feu d'émeraude. L'*ij* est comme le soleil dans cette pléiade d'astres alphabétiques. Après cela, vient l'*a* qui me donne une impression de rubis clair partout où il a le son long-aigu, et qui perd de son brillant à mesure qu'il se rapproche de l'*a* grave.

» Voici du reste toute ma gamme chromatique :

a = rouge;	*i* = noir;	*u* = violet;
e = jaune;	*o* = blanc;	*ij* = vert.

» Les consonnes n'ont pas de couleur propre; mais, dans certains cas, elles participent à un reflet de voyelles.

» Chose curieuse, le phénomène se produit aussi quand je vois un mot imprimé ou écrit, et alors la couleur que je perçois ne dépend plus de la prononciation de la lettre. Ainsi, quoique *i* et *ij* aient le même son dans les mots *ice* (anglais) et *ijs* (hollandais), cependant à la lecture du mot *ice* je vois le noir de l'*i* et *ijs* me donne la sensation régulière du vert de l'*ij*.

» Je dois aussi faire remarquer que cette audition colorée est pour moi un moyen mnémotechnique. Un mot m'échappe-t-il, je parviens à le reconstituer par les couleurs correspondant aux différentes voyelles. Très souvent, lors même que je ne me rappelle pas du tout le terme à retrouver, il me suffit d'y penser : une teinte vague se présente; en y pensant encore, le brouillard s'éclaircit, les couleurs apparaissent et les couleurs ramènent les voyelles. »

On le voit, le phénomène observé sur le sujet dont parle le R. P. Van den Gheyn se présente avec des conditions identiques à celles qui ont été constatées par MM. Bleuler, Schmann et Ughetti en Allemagne et en Italie. Deux voyelles seulement ont des couleurs différentes, et encore y a-t-il simple inversion des deux mêmes couleurs : les personnes dont parle le *Cosmos* voient l'*a* noir et l'*i* rouge ; c'est le contraire pour celle que connait le R. P. Van den Gheyn ; l'*i* est noir et l'*a* rouge.

On a tenté plusieurs explications de ce phénomène. M. Bleuler l'attribue à l'hallucination. Mais l'hallucination est passagère et variable ; ici, au contraire, les impressions sont persistantes et identiques, non seulement chez la même personne, mais chez des individus différents.

M. Barreggi a cru trouver la clef du mystère dans une exagération de la faculté d'associer des idées. L'explication aurait quelque valeur si, au cas présent, il s'agissait d'une perception intellectuelle. Mais, qu'on ne l'oublie pas, il s'agit de sensations associées, confondues, et non pas d'idées. En outre, dans cette hypothèse, chez différentes personnes les associations d'idées ne varieraient-elles pas? En effet, il n'existe aucune analogie naturelle entre tel *son* et telle *couleur déterminée.*

D'autres ont fait valoir les grandes similitudes constatées par la physiologie entre la vue et l'ouïe, similitudes confirmées aussi par le langage. On relève, en effet, dans toutes les langues des expressions métaphoriques confondant les sensations de la vue et de l'ouïe. Le R. P. Van den Gheyn a cité quelques exemples curieux.

On lit dans Sophocle, *Œdipe roi* (v. 187) : παιὰν δὲ λάμπει, le péan *brille*, c'est-à-dire *résonne*. Dans *Philoctète* (v. 188, 202, 216) se rencontrent les expressions suivantes : ἠχὼ τηλεφανὴς, l'écho qui s'*aperçoit* de loin, pour l'écho qu'on *entend* au loin ; προὐφάνη κτυπὸς, le bruit s'est *vu*, c'est-à-dire s'est fait *entendre ;* τηλωπὸν ἰωὰν, un cri qu'on *voit* de loin.

Virgile a dit (*Georg.*, IV, 50) : *Vocisque offensa resultat imago.* Que dire de cet accouplement de mots *vocis imago?* En latin *fuscus,* quand ce mot s'entend de la couleur, veut dire :

sombre, brun, car Cicéron en disant *purpura fusca* désigne une pourpre presque brune. Or le même Cicéron (*N. D.*, II, 58), quand il veut définir les différentes espèces de voix, distingue la voix blanche (¹) et la voix sombre : « *Vocis genera permulta : candidum, fuscum...* »

En français les exemples abondent. Il suffit de se rappeler l'usage des mots : *éclatant, brillant.* On dit également un *son* éclatant, une *couleur* éclatante, des teintes criardes. Aussi, quand on y pense bien, on n'est pas tenté de trouver étrange la réflexion de Victor Hugo dans le réveil des cloches du vieux Paris, lorsqu'il dit : « Il semble qu'en certains instants l'oreille a aussi sa vue ».

Terminons par quelques exemples empruntés aux langues germaniques. On dit en flamand *helle kleur* et *helle stem,* une couleur et une voix éclatantes. L'anglais associe les termes suivants : *scarlet, purple warcry,* « un cri de guerre écarlate ».

L'explication qu'on donne généralement pour justifier ces manières de parler se borne à dire : ce sont des figures de langage, des métaphores. Fort bien, mais n'est-ce pas reculer la réponse? La métaphore elle-même ne demande-t-elle pas à être expliquée? Or, la métaphore n'est le plus souvent, sinon toujours, que l'expression réelle et fidèle de ce qui se passe vraiment dans la nature, et l'on a dit un jour avec infiniment de raison : « Le style figuré est et a toujours été le style le plus naturel, le style ordinaire, nous dirions presque le style propre. Les peuples furent de tous temps les meilleurs linguistes et souvent ils ont exprimé d'instinct dans leurs mots ce qu'une science approfondie est venue découvrir des siècles après eux. »

Si donc la langue a pu ne choisir qu'une seule et même expression pour désigner des sensations de la vue et de l'ouïe, c'est que la logique du langage avait pressenti des analogies entre le son et la lumière. D'ailleurs, dans un autre ordre de choses, le physiologiste Bichat avait déjà fait remarquer que les expressions telles que « la fureur circulant dans les veines, la

(¹) On voit que M. Champfleury aurait pu s'autoriser de l'exemple de Cicéron pour donner à son héros *une voix blanche.*

joie faisant tressaillir les entrailles » ne sont pas des métaphores, mais l'énoncé de ce qui est réellement dans la nature.

Un exemple célèbre vient à l'appui de cette assertion. Tous les poètes du temps ont décrit les tortures morales de Napoléon Ier, le prisonnier de Sainte-Hélène, *rongé* par le chagrin et l'inaction forcée à laquelle on l'avait condamné. Eh bien, oui, il il se rongeait. L'autopsie révéla qu'il avait un squirre au pylore.

En un mot, la métaphore répond plus souvent qu'on ne croit à une réalité. En particulier, pour ce qui concerne les expressions relatives tout à la fois au son et à la couleur, elles sont fondées sur les analogies réelles qui existent entre ces deux sensations.

L'audition colorée est donc un état pathologique très explicable. Elle résulte d'une confusion faite dans le cerveau entre les vibrations moléculaires transmises par deux organes différents. Cette confusion tient évidemment à une disposition particulière du système nerveux.

En tout cas, l'on est en présence d'un phénomène curieux à étudier et, l'attention une fois éveillée sur ce point, il est à désirer que les observations se multiplient. Comme pour le daltonisme, qui fut ignoré pendant des siècles, on arrivera sans doute à faire d'utiles découvertes, qui jetteront un nouveau jour sur l'étude de la perception sensorielle et par suite aussi sur le travail de la pensée.

M. le Dr Delgeur, s'inspirant notamment des fouilles d'Édouard Naville, retrace l'itinéraire de l'Exode. Cette communication a depuis pris la forme d'un article publié dans la *Revue des questions scientifiques*, tome XIX, pages 39 et suivantes.

Quatrième Section.

—

Jeudi, 30 octobre 1884. — M. le professeur Desplats, de Lille, traite la question de l'atrophie des muscles du thorax et de l'épaule chez les pleurétiques. Ce travail est publié plus loin,

sombre, brun, car Cicéron en disant *purpura fusca* désigne une pourpre presque brune. Or le même Cicéron (*N. D.*, II, 58), quand il veut définir les différentes espèces de voix, distingue la voix blanche ([1]) et la voix sombre : « *Vocis genera permulta : candidum, fuscum...* »

En français les exemples abondent. Il suffit de se rappeler l'usage des mots : *éclatant, brillant.* On dit également un *son* éclatant, une *couleur* éclatante, des teintes criardes. Aussi, quand on y pense bien, on n'est pas tenté de trouver étrange la réflexion de Victor Hugo dans le réveil des cloches du vieux Paris, lorsqu'il dit : « Il semble qu'en certains instants l'oreille a aussi sa vue ».

Terminons par quelques exemples empruntés aux langues germaniques. On dit en flamand *helle kleur* et *helle stem,* une couleur et une voix éclatantes. L'anglais associe les termes suivants : *scarlet, purple warcry,* « un cri de guerre écarlate ».

L'explication qu'on donne généralement pour justifier ces manières de parler se borne à dire : ce sont des figures de langage, des métaphores. Fort bien, mais n'est-ce pas reculer la réponse? La métaphore elle-même ne demande-t-elle pas à être expliquée? Or, la métaphore n'est le plus souvent, sinon toujours, que l'expression réelle et fidèle de ce qui se passe vraiment dans la nature, et l'on a dit un jour avec infiniment de raison : « Le style figuré est et a toujours été le style le plus naturel, le style ordinaire, nous dirions presque le style propre. Les peuples furent de tous temps les meilleurs linguistes et souvent ils ont exprimé d'instinct dans leurs mots ce qu'une science approfondie est venue découvrir des siècles après eux. »

Si donc la langue a pu ne choisir qu'une seule et même expression pour désigner des sensations de la vue et de l'ouïe, c'est que la logique du langage avait pressenti des analogies entre le son et la lumière. D'ailleurs, dans un autre ordre de choses, le physiologiste Bichat avait déjà fait remarquer que les expressions telles que « la fureur circulant dans les veines, la

---

([1]) On voit que M. Champfleury aurait pu s'autoriser de l'exemple de Cicéron pour donner à son héros *une voix blanche.*

ou suspects de tuberculose. Toutes ces méthodes sont basées sur un double fait : 1° comme la plupart des microbes, le bacille de Koch se laisse imprégner par les matières colorantes du groupe des anilines (fuchsine, bleu de méthylène, etc.), mais ici l'opération exige certaines conditions spéciales, à savoir : un certain laps de temps (12 à 24 heures) ou, si l'on veut aller plus vite, l'intervention de la chaleur et l'emploi d'une substance adjuvante, à base alcaline, dont le rôle est peu connu ; 2° une fois coloré, le bacille conserve sa coloration avec une grande ténacité. Ainsi, tandis que, sous l'influence d'agents énergiques tels qu'un acide étendu, les autres éléments (noyaux, microbes divers) sont décolorés, le bacille reste seul imprégné du principe colorant.

» La méthode d'Ehrlich, si précise dans ses résultats, n'a pas tardé à devenir en quelque sorte classique et à supplanter le procédé primitif de Koch, abandonné bientôt par son auteur lui-même ([1]). Cette méthode, qui forme la base d'une foule d'autres procédés sans importance, consiste, en résumé, à décolorer par une solution acide une préparation préalablement imprégnée d'une matière colorante (fuchsine, violet de méthyle) : les bacilles de la tuberculose conservent seuls leur coloration ; on fait ensuite agir une seconde aniline faisant contraste avec la coloration imprimée aux bacilles par la première. Voici le détail du *modus faciendi :* 1° on dessèche à l'air libre ou en la passant deux ou trois fois rapidement dans la flamme d'une lampe à alcool la lamelle sur laquelle on a étalé le crachat en couche mince ; 2° on verse dans un tube une solution aqueuse saturée d'huile d'aniline et l'on filtre. Ce liquide, qui doit jouer le rôle du milieu alcalin, doit être préparé au moment de servir. On le verse dans un récipient quelconque et l'on y ajoute plusieurs gouttes d'une solution alcoolique concentrée de fuchsine; 3° on dépose dans cette solution ainsi colorée la lamelle de verre chargée de la matière expectorée, et on l'y laisse pendant 12 à 24 heures ; dix

([1]) Koch colorait la préparation par le *bleu de méthylène* alcalinisé, puis il la soumettait à l'action de la *vésuvine* qui colorait tout en brun, à l'exception des bacilles tuberculeux qui conservaient la coloration bleue du début.

à quinze minutes d'immersion suffisent, si l'on a eu soin de chauffer au préalable le liquide; 4° la lamelle est lavée dans l'eau distillée, puis plongée dans une solution d'acide nitrique à 30 °/₀, jusqu'à ce que toute coloration ait disparu, c'est-à-dire pendant quelques secondes seulement; 5° on plonge la lamelle, après lavage, dans une solution concentrée de bleu de méthylène; 6° on lave encore, on sèche, puis la préparation est montée dans le baume de Canada.

» Au lieu de fuchsine, on peut se servir de violet de méthyle; dans ce cas, on a recours, comme seconde matière colorante, à la vésuvine.

» Cette méthode donne d'excellents résultats, les bacilles tranchant très nettement sur la coloration du fond.

» Elle présente cependant un inconvénient : elle exige, on le voit, une série de manipulations assez longues, et elle demande au moins 25 minutes de préparation, ce qui est beaucoup pour le praticien dont le temps est compté.

» Le Dr B. Fränkel a modifié récemment d'une manière très avantageuse le procédé d'Ehrlich (1). L'huile d'aniline ne doit plus être préparée au moment même de la recherche, mais peut être conservée grâce à l'alcool qu'on y ajoute (alcool 50 c. c., huile d'aniline 3 c. c., eau distillée 90 c. c.). Il n'est plus nécessaire de filtrer. En second lieu, la solution colorante de fond renferme l'acide destiné à enlever à tout ce qui n'est pas bacille la coloration première. La marche à suivre est celle-ci : 1° dessécher, comme on l'a dit plus haut, la petite lamelle (couvre-objet ou deck-glass des micrographes) qui porte la matière expectorée; 2° verser dans un petit récipient (verre de montre, etc.) la solution d'aniline alcoolisée dont nous venons de citer la formule, et y laisser tomber quelques gouttes d'une solution alcoolique concentrée de fuchsine jusqu'à opalescence. Chauffer jusqu'à dégagement de légères vapeurs et déposer dans le liquide la lamelle

(1) *Berliner klinisch Wochenschrift*, 1884, pp. 193 et 214. Une traduction de cet important travail, qui traite de la valeur sémiologique du bacille de Koch aussi bien que de la technique des procédés de coloration, a paru dans le n° d'août 1884 du *Journal de médecine*, etc., de Bruxelles.

à examiner; 3° après avoir laissé flotter la lamelle pendant 3 à 6 minutes dans ce liquide, on l'en retire délicatement au moyen d'une petite pince et on la lave en l'agitant rapidement dans un verre d'eau pure, puis on la dépose dans la solution acidulée de bleu de méthylène (alcool 50 gr., eau 30 gr., acide nitrique 20 gr., bleu de méthylène en quantité suffisante pour obtenir une solution complètement saturée); 4° laver, sécher sur du papier buvard et, au besoin, passer la lamelle à la flamme de la lampe à alcool; puis laisser tomber sur la face qui porte le crachat coloré une goutte de baume de Canada et déposer cette lamelle du côté où l'on a mis le baume sur une lame de verre porte-objet. Cette opération, pour peu qu'on en ait acquis quelque habitude, ne demande pas plus d'une dizaine de minutes. Si l'on ne tient pas à conserver la préparation, on peut remplacer le baume de Canada par l'essence de girofle, qui éclaircit encore les éléments.

» Il n'est guère possible de constater clairement la présence des bacilles et d'en découvrir les contours, sans l'emploi d'un fort grossissement : avec l'objectif *F* de Zeiss, surtout si l'on y ajoute le condensateur d'Abbe, on distingue déjà fort bien ces organismes; mais c'est surtout l'objectif à immersion qui les fait voir avec une netteté remarquable.

» Il est à noter que les préparations de crachat séché sur lamelle peuvent être conservées plusieurs jours sans subir aucune altération, avant d'être colorées et montées dans le baume de Canada. »

M. Warlomont termine sa communication en faisant, sous les yeux des membres présents, la démonstration du procédé de Fränkel tel qu'il vient de le décrire. Il fait voir aussi, au microscope, quelques préparations de crachats de phtisiques renfermant des bacilles.

Enfin, M. le professeur Lefebvre clôture la séance en exposant le procédé opératoire qu'il a suivi pour délivrer un malade des végétations qu'il portait à la lèvre inférieure. Il a taillé dans l'épaisseur de celle-ci un lambeau sous forme de prisme triangu-

laire qu'il a enlevé. Quelques points de suture ont permis une réunion par première intention. M. Lefebvre estime que l'on recourrait avec avantage à ce procédé dans le cas de lèvres lippues.

Jeudi, 16 avril 1885. — M. Desplats traite la question de l'hystérie chez l'homme et il cite divers exemples. L'un d'eux a rapport à un jeune homme qui, à certains moments, se trouvait atteint de paraplégie avec paralysie du rectum et de la vessie. Puis les phénomènes disparaissaient entièrement. Leur mobilité ne pouvant permettre de les rattacher à une lésion de la moelle épinière, on doit les considérer comme étant de nature hystérique.

Un autre malade de M. Desplats se plaignit un jour de vives douleurs de tête avec élévation de température. Sans attacher de signification grave à cet état, M. Desplats apprit, non toutefois sans étonnement, le lendemain, qu'une crise convulsive s'était déclarée et qu'un médecin appelé brusquement avait jugé qu'il s'agissait d'une méningite. Le malade avait une respiration râlante et la tête était renversée convulsivement en arrière. M. Desplats admit donc ce diagnostic d'autant plus que le malade présentait de l'inégalité des pupilles et restait sans connaissance. Le lendemain et le surlendemain, de nouvelles crises se déclarèrent, et comme elles se renouvelaient presque aux mêmes heures, M. Desplats fit en sorte d'assister à l'une d'elles. Il acquit alors la conviction de leur nature purement nerveuse et, en soulevant brusquement la tête du patient et en lui faisant une forte insufflation sur le visage, il le rappela à un état normal.

Enfin l'histoire d'un autre malade est encore plus étrange. Il se présente atteint d'hémiplégie dans le service de M. Desplats et accusant des vomissements et des pissements de sang. D'après son dire, il était tombé à Anvers du pont d'un navire sur la traverse d'une soute au charbon. En était-il résulté un traumatisme qui avait occasionné les différents signes objectifs qu'il présentait ? C'était très probable. Il était depuis six mois dans le service, quand il entendit parler d'un pèlerinage que l'on devait faire à Lourdes. Il voulut y prendre part. Il s'y rendit avec beaucoup de peine. Le premier bain qu'il prit dans la piscine n'eut

aucun résultat; mais un second bain le guérit radicalement. Et en effet M. Desplats le revit entièrement rétabli, jusqu'au point de pouvoir reprendre son ancienne profession. Ce malade avait beaucoup voyagé et avait fréquenté les hôpitaux d'Angleterre et de Belgique. Aussi sa guérison fit-elle énormément de bruit. De toutes parts arrivèrent à M. Desplats des lettres lui demandant sur un fait aussi extraordinaire des renseignements que l'on voulait publier comme attestation d'un miracle. M. Desplats se disposait à faire une relation de tout ce qu'il avait vu, quand on vint lui apprendre que son ancien malade avait subitement quitté Lille et était entré à l'hôpital de Valenciennes, avec tous les signes d'une hémiplégie compliquée de vomissements et de pissements de sang. Cette fois le malade affirmait qu'il était tombé du haut d'un toit. Inutile de dire que, tout en paraissant de bonne foi, il était victime d'une hallucination et que la nature de sa maladie ne trompa plus personne.

De tous les faits qu'il a rapportés, M. Desplats se dit naturellement en droit de conclure à l'existence de l'hystérie chez l'homme.

M. Cuylits croit aussi à l'existence de l'hystérie chez l'homme, et il estime même que le sexe masculin a le privilège de la présenter sous la forme la plus caractéristique.

Après cette communication de M. Desplats et la courte discussion qui s'ensuit, M. le D[r] René Warlomont soumet à l'assemblée une série de préparations d'histologie normale et pathologique de l'œil. Il décrit, à cette occasion, les procédés qu'il a vu employer à Londres, à la *Royal London ophthalmic Institution, Moorfields*, pour l'exécution des coupes de l'œil faites *in toto*. L'obstacle à éviter ici, c'est la déformation des tissus et l'altération de leurs rapports anatomiques. Voici comment on procède : l'œil fraichement énucléé est plongé dans un liquide durcissant ou fixateur, le liquide de Müller (bichromate de potasse 2 grammes, sulfate de K. 1 gramme, eau distillée 100 grammes). L'échantillon séjournera trois à quatre semaines dans ce liquide, puis on l'en retirera, et on le sectionnera avec soin, au rasoir, en deux hémisphères bien symétriques; ceux-ci seront lavés dans

l'eau ordinaire pendant quelques heures, dans le but de leur enlever la coloration jaune que le liquide de Müller leur a communiquée.

L'hémisphère que l'on voudra étudier sera plongé ensuite pendant vingt-quatre heures au moins dans l'alcool ordinaire, puis sera soumis pendant un jour encore à l'action de l'alcool absolu. On le transportera alors dans une solution de celloïdine, composée de celloïdine (variété de nitro-cellulose) dissoute dans parties égales d'éther sulfurique et d'alcool absolu. On laissera la pièce s'imprégner et se remplir lentement de ce liquide mucilagineux; puis, au bout de vingt-quatre heures, on la placera dans une boite en papier ou en métal *ad hoc* que l'on remplira de la solution de celloïdine. Cette solution, laissée ainsi à l'air libre, ne tardera pas à se solidifier et à se prendre en une masse élastique, transparente, emprisonnant dans son épaisseur la pièce orientée comme il convient pour le corps. Ce bloc achèvera de se solidifier dans l'alcool ordinaire, où il pourra être conservé indéfiniment. Au moment qu'on voudra, il pourra être soumis à la coupe par le microtome. Le microtome à immersion dans l'alcool, de la maison Katset, donne d'excellentes coupes, très régulières et très complètes, que l'on soumet, après lavage, à un liquide colorant, et que l'on monte ensuite d'après le mode ordinaire (passage dans l'essence de bergamote, de préférence à l'essence de girofle, puis montage dans le baume de Canada).

M. Cuylits expose un cas remarquable d'atrophie unilatérale, intéressant à la fois les membres, le tronc et le crâne. Il ne peut malheureusement pas faire voir le malade, mais il donne les mesures de chacune des parties du côté atrophié en regard de celles des parties correspondantes du côté sain.

Le malade présentait cette affection grâce sans doute à une influence héréditaire, car plusieurs membres de sa famille en étaient également atteints. M. Cuylits incline à reconnaître à la maladie une origine centrale. D'après M. Desplats, il faudrait au contraire en accuser une lésion du grand sympathique.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 30 OCTOBRE 1884.

M. l'ingénieur Blondel a, dans une intéressante causerie, décrit les choses qui l'ont le plus frappé lors d'un voyage qu'il a fait en Chine et en Mongolie.

Parti de Shanghaï, il a gagné Tien-tsin par la mer Jaune et le golfe de Pé-tchi-li, remontant le fleuve du Pei-ho.

Puis il a continué son voyage, passant par Pékin, Nang-kao, Shuen-hoa-fou et Kalgan.

De cette dernière ville, qui est située sur la *grande muraille*, il a visité divers campements mongols, et s'est rendu à Si-wan-tzé, lieu de la résidence de Mgr Bax et des missionnaires belges sortis du séminaire de Scheut.

Le conférencier rappelle que l'écriture chinoise se compose de 212 signes, qui, réunis et combinés ensemble, forment autant de caractères qu'il y a de mots dans la langue. Ces 212 signes représentent des choses parfaitement définies ; ainsi, tels signes veulent dire ciel, homme, terre, chien, bœuf, oiseaux, plantes, métaux, etc. Or, si on accole le signe qui veut dire homme au signe qui veut dire ciel, on aura un caractère qui exprimera l'idée homme du ciel ou un ange. Le signe métal, uni au signe cheval, formera un caractère qui donnera la conception d'un métal appliqué au cheval ou d'un mors, et ainsi de suite. Plus un caractère renferme de signes et plus il est difficile à comprendre, sa compréhension n'étant que la résultante des divers signes qui le composent. Cela explique la difficulté qu'ont les Chinois pour représenter des objets tels que machine à coudre, pile électrique, téléphone, etc., car leurs divers signes combinés ensemble n'éveillent encore qu'une bien faible idée de la chose représentée.

L'empereur de Chine est une espèce d'idole pour ses sujets;

quand il sort de son palais, les rues de Pékin par où il doit passer sont désertes, les maisons sont couvertes de tentures et les soldats qui forment la haie tournent leur visage du côté des murailles. Il est défendu, sous peine de mort, à tout sujet chinois de chercher à voir l'empereur.

La misère des artisans est extrêmement grande; il faut nourrir femme et enfants en ne gagnant souvent que la valeur de cinquante centimes par jour. Quantité de gens en Chine n'ont pas d'abri, ils naissent et meurent dans les rues.

La seule monnaie qui existe est la sapèque, qui vaut un demi-centime — jugez du poids de deux et trois cents francs en sapèques! — aussi dans le cours de ses voyages M. Blondel devait-il faire porter sa bourse par un mulet.

Près de Chi-ming-i le conférencier a visité une mine de houille. L'exploitation y était des plus primitives; en fait d'épuisement, il a vu des équipes d'ouvriers occupés à descendre toute la journée pour remplir des seaux d'eau au fond de la mine et venir ensuite les vider à la surface. Ailleurs c'est un canal sans écluses qui nécessite de nombreux transbordements.

S'il n'y a pas de chemins de fer en Chine, c'est à cause de l'opposition systématique des mandarins, qui auraient trop à redouter l'ingérence de Pékin dans leurs affaires.

La grande muraille de Chine se trouve dans un pays très accidenté ; cette construction extraordinaire escalade les pics et descend au fond des précipices.

C'est de Kalgan que partent les caravanes pour la Sibérie; les convois de charrettes mettent trois mois pour traverser l'immense désert de Gobi, et le courrier de la poste russe qui court jour et nuit, ne faisant aux relais que sauter d'un cheval sur un autre, arrive à faire en 10 jours ses 1500 kilomètres.

Le peuple mongol est pasteur; il ne se nourrit que de viande; n'ayant aucune culture, il ne mange ni grain, ni riz, ni pain. Ces gens, d'une force extraordinaire, restent 15 et 20 heures à cheval. Ils sont extrêmement sales. Le Mongol, qui ne se lave jamais, dort tout habillé; l'hiver, par des froids très rigoureux, il pose au-dessus de ses vêtements deux, trois et quatre jaquettes en peau

de mouton ; il ne change jamais d'habits et vit avec toute cette charge sur le dos.

Non loin de la grande muraille M. Blondel a retrouvé en Mongolie quantité de villages chinois. La Chine, avec ses 500 millions d'habitants, fourmille de monde ; chaque année le trop-plein de la population déborde et vient s'établir en Mongolie.

Dans une étude rapide, le conférencier a terminé par l'exposé de nombreux documents chinois qui ne laissent aucun doute sur la fréquence et la multiplicité des infanticides chinois, malgré les tristes articles de M. Sarcey.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 29 JANVIER 1885.

A l'ordre du jour de la séance était inscrite une conférence du R. P. Van den Gheyn sur l'*Ethnographie des Balkans*. Parmi les populations nombreuses et variées qui occupent les régions danubiennes, le conférencier s'est arrêté aux Roumains et aux Bulgares. Ces deux peuples représentent, en effet, les antiques races de la péninsule balkanique aux époques primitives, et ils ont réussi à se maintenir jusqu'à nous avec un caractère d'originalité plus marqué.

Les Roumains descendent des colons envoyés par l'empereur Trajan sur les rives du Danube après la conquête de la Dacie. Du mélange des vétérans romains avec les anciens Daces sortit un peuple nouveau, celui des Daco-Romains, connus au moyen âge sous le nom de Valaques et aujourd'hui sous celui de Roumains. Le P. Van den Gheyn développe les preuves de cette thèse ethnographique : les bas-reliefs de la colonne Trajan en sont l'impérissable document; l'histoire des colonies romaines en Dacie, en expliquant la transformation du peuple dace, donne aussi la clef du caractère essentiel sur lequel devait reposer l'idée de sa nationalité future. Enfin, la philologie, qui a fait rentrer l'idiome roumain dans la famille latine, et l'archéologie, qui a démontré la persistance des usages du Latium en Valachie, ont apporté à la thèse de l'origine daco-romaine des Roumains une solennelle consécration.

Pour être d'origine tartare, les Bulgares ne s'en sont pas moins complètement slavifiés, et ils sont entrés profondément dans l'unité des populations européennes. On peut en trouver la cause dans l'influence exercée sur les Bulgares par l'ancienne population des Thraces, qui occupait encore, vivace et forte, plusieurs régions de la Roumélie quand, au Ve siècle, les Bulgares vinrent se jeter dans les plaines de l'Hèbre.

Dans la seconde partie de sa conférence, le P. Van den Gheyn a établi la parenté des Daces et des Thraces et résumé brièvement l'état actuel des recherches sur les origines du peuple daco-thrace. Cinq systèmes principaux sont encore en présence. Les uns, à la suite de Hugo Grotius, voient dans les Thraces des Germains; d'autres les rattachent aux Slaves. M. Urechia les identifie avec les anciens Pélasges, ancêtres des Grecs. Une quatrième thèse, défendue surtout par Henri Martin, Guillaume Lejean et un savant roumain, M. Obédénare, affirme la provenance celtique des peuples des Balkans. Le P. Van den Gheyn soutient l'idée de MM. Tomaschek, Lenormant, Picot, Evans, etc., qui ramènent les Thraces et les Daces au rameau éranien ou persan de la race aryenne.

Sur quels arguments s'appuie cette opinion? Il en est trois principaux : c'est l'éranien qui explique le plus naturellement les langues dace et thrace; le culte des Thraces porte l'empreinte des religions asiatiques; enfin les témoignages de l'antiquité classique sont formels à cet égard.

En terminant, le conférencier a brièvement esquissé l'histoire du rameau thrace, détaché à des époques préhistoriques de la grande souche aryenne. A leur arrivée en Europe, les Thraces se fractionnèrent : les Daces peuplèrent la région des Carpathes, tandis que les tribus thraces descendirent dans la péninsule hémique. Sous les coups des invasions barbares, les Thraces disparurent comme nation. Les Daces survécurent et le sang romain infusé dans leurs veines leur donna une vie nouvelle. Les voici qui, dégagés de l'étreinte étrangère, se présentent au milieu des autres peuples latins, ayant reconquis leur place comme nation indépendante et redisant leur vieille devise : *Romoun no pere*, le Roumain ne périra pas!

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU LUNDI 13 AVRIL 1885.

Le R. P. Carbonnelle, secrétaire de la Société scientifique, lit le rapport suivant :

MESSIEURS,

La Société scientifique de Bruxelles existe depuis dix ans.

Pendant ce temps, non contente d'exister, elle a vécu; non contente de vivre, elle a travaillé.

Ce fut, en effet, le 1er et le 22 mars 1875 qu'une dizaine d'amis appartenant à l'enseignement supérieur et à d'autres professions savantes se réunirent à Bruxelles pour discuter l'opportunité et les chances de succès de la future association. Ils déterminèrent les traits essentiels du projet, et promirent, en se séparant, de le faire connaitre autour d'eux dans la capitale et dans les provinces. Ce fut le 10 et le 17 juin de la même année que, grâce à leurs démarches, on put convoquer des réunions plus nombreuses, où l'on vota les statuts et où l'on décida qu'au mois de novembre suivant la Société se constituerait définitivement si, condition expresse et rigoureuse, l'on pouvait avant cette époque recueillir au moins 250 adhésions. L'événement prouva que cette condition prudente n'était pas présomptueuse. Beaucoup d'entre vous se rappellent encore la belle séance du 18 novembre 1875, et le magnifique discours prononcé par notre premier président devant une nombreuse assemblée, où non seulement Bruxelles, mais la plupart des villes du pays étaient représentées. Anvers, Beaumont, Bruges, Charleroi, Chièvres, Gand, Grammont, Hasselt, Huy, Liège, Lierre, Louvain, Malines, Mons, Nivelles, Saint-Nicolas, Termonde, Tournay, Verviers, Vilvorde, plusieurs autres communes et même des pays voisins, la France et la Hollande, avaient envoyé des adhérents à cette séance d'inauguration. Ce n'était pas seulement 250, mais 433 adhésions que nous comptions ce jour-là. Il est clair qu'avec un pareil nombre nous pouvions déclarer que la Société existait, et proclamer définitivement nos statuts, dont le premier article porte : « Il est constitué à

Pour être d'origine tartare, les Bulgares ne s'en sont pas moins complètement slavifiés, et ils sont entrés profondément dans l'unité des populations européennes. On peut en trouver la cause dans l'influence exercée sur les Bulgares par l'ancienne population des Thraces, qui occupait encore, vivace et forte, plusieurs régions de la Roumélie quand, au V[e] siècle, les Bulgares vinrent se jeter dans les plaines de l'Hèbre.

Dans la seconde partie de sa conférence, le P. Van den Gheyn a établi la parenté des Daces et des Thraces et résumé brièvement l'état actuel des recherches sur les origines du peuple daco-thrace. Cinq systèmes principaux sont encore en présence. Les uns, à la suite de Hugo Grotius, voient dans les Thraces des Germains; d'autres les rattachent aux Slaves. M. Urechia les identifie avec les anciens Pélasges, ancêtres des Grecs. Une quatrième thèse, défendue surtout par Henri Martin, Guillaume Lejean et un savant roumain, M. Obédénare, affirme la provenance celtique des peuples des Balkans. Le P. Van den Gheyn soutient l'idée de MM. Tomaschek, Lenormant, Picot, Evans, etc., qui ramènent les Thraces et les Daces au rameau éranien ou persan de la race aryenne.

Sur quels arguments s'appuie cette opinion? Il en est trois principaux : c'est l'éranien qui explique le plus naturellement les langues dace et thrace; le culte des Thraces porte l'empreinte des religions asiatiques; enfin les témoignages de l'antiquité classique sont formels à cet égard.

En terminant, le conférencier a brièvement esquissé l'histoire du rameau thrace, détaché à des époques préhistoriques de la grande souche aryenne. A leur arrivée en Europe, les Thraces se fractionnèrent : les Daces peuplèrent la région des Carpathes, tandis que les tribus thraces descendirent dans la péninsule hémique. Sous les coups des invasions barbares, les Thraces disparurent comme nation. Les Daces survécurent et le sang romain infusé dans leurs veines leur donna une vie nouvelle. Les voici qui, dégagés de l'étreinte étrangère, se présentent au milieu des autres peuples latins, ayant reconquis leur place comme nation indépendante et redisant leur vieille devise : *Romoun no pere*, le Roumain ne périra pas!

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU LUNDI 13 AVRIL 1885.

Le R. P. Carbonnelle, secrétaire de la Société scientifique, lit le rapport suivant :

Messieurs,

La Société scientifique de Bruxelles existe depuis dix ans.

Pendant ce temps, non contente d'exister, elle a vécu; non contente de vivre, elle a travaillé.

Ce fut, en effet, le 1er et le 22 mars 1875 qu'une dizaine d'amis appartenant à l'enseignement supérieur et à d'autres professions savantes se réunirent à Bruxelles pour discuter l'opportunité et les chances de succès de la future association. Ils déterminèrent les traits essentiels du projet, et promirent, en se séparant, de le faire connaître autour d'eux dans la capitale et dans les provinces. Ce fut le 10 et le 17 juin de la même année que, grâce à leurs démarches, on put convoquer des réunions plus nombreuses, où l'on vota les statuts et où l'on décida qu'au mois de novembre suivant la Société se constituerait définitivement si, condition expresse et rigoureuse, l'on pouvait avant cette époque recueillir au moins 250 adhésions. L'événement prouva que cette condition prudente n'était pas présomptueuse. Beaucoup d'entre vous se rappellent encore la belle séance du 18 novembre 1875, et le magnifique discours prononcé par notre premier président devant une nombreuse assemblée, où non seulement Bruxelles, mais la plupart des villes du pays étaient représentées. Anvers, Beaumont, Bruges, Charleroi, Chièvres, Gand, Grammont, Hasselt, Huy, Liège, Lierre, Louvain, Malines, Mons, Nivelles, Saint-Nicolas, Termonde, Tournay, Verviers, Vilvorde, plusieurs autres communes et même des pays voisins, la France et la Hollande, avaient envoyé des adhérents à cette séance d'inauguration. Ce n'était pas seulement 250, mais 453 adhésions que nous comptions ce jour-là. Il est clair qu'avec un pareil nombre nous pouvions déclarer que la Société existait, et proclamer définitivement nos statuts, dont le premier article porte : « Il est constitué à

Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* ».

Mais depuis lors, comme je le disais, nous ne nous sommes pas contentés d'exister, nous avons vécu ; je veux dire que, suivant la loi naturelle de tous les corps vivants, nous avons continué d'attirer à nous et de nous assimiler de nouveaux éléments. Je viens de parcourir la plus ancienne liste complète de nos membres, écrite quelques jours après notre séance d'inauguration; et il m'a semblé instructif de la comparer à la liste actuelle. J'ai trouvé dans celle-ci 395 noms qui ne sont pas dans la première. Ces 395 noms représentent la majorité des éléments que la Société s'est assimilés depuis sa naissance ; ils sont donc la preuve de notre vitalité.

Seulement, je tiens à le dire ici pour ne rien déguiser, pendant que nous acquérions ces nouveaux éléments, nous en perdions d'autres. Des 460 noms qui figurent sur la liste de 1875, il n'y en a que 191 qui restent sur celle de 1885. La mort nous a, en dix ans, enlevé 102 membres. D'autres nous ont quittés, quoique à regret, pendant ces dernières années, à cause des grands sacrifices que les Belges devaient alors s'imposer pour la défense de leur foi et de leur liberté. Enfin, permettez-moi de l'ajouter, tandis qu'au début beaucoup de nos premiers adhérents tenaient à honneur de nous amener leurs amis, on compte un peu trop aujourd'hui sur la puissance naturelle d'attraction d'une société prospère. On oublie que l'attraction d'un corps n'est que la résultante des attractions de ses parties. Le soleil lui-même, malgré son éclat et même malgré sa masse, ne pourrait retenir les planètes autour de lui, s'il ne se composait que d'éléments impondérables. Ne soyons pas des impondérables, Messieurs ; notre succès dépend de nous. Le nombre actuel de nos membres est de 586, dont 410 Belges et 176 étrangers ; nous comptons donc 10 Belges et 5 étrangers de moins que l'année dernière. Je suis persuadé que, si nous le voulons, ces 15 lacunes seront comblées avant la fin de cette session.

J'ai dit aussi que la Société, non contente d'exister et de vivre, a travaillé ; j'ajoute qu'elle a travaillé heureusement et utilement.

Il suffit, pour le prouver, de montrer les huit volumes de nos *Annales* et les dix-sept volumes de notre *Revue*. Ces publications commencent à faire bonne figure sur les rayons des bibliothèques; on en trouve souvent les titres au bas des pages des ouvrages sérieux. Depuis longtemps les travaux publiés dans les *Annales* sont cités dans les discussions académiques et dans les recueils scientifiques. La *Revue*, qui compte des abonnés dans tous les pays de l'Europe et de l'Amérique, qui en a même quelques-uns dans chacune des autres parties du monde et qui est encore plus connue à l'étranger qu'en Belgique, recueille de plus en plus des témoignages de sympathie. Elle a même pénétré et trouvé des lecteurs assidus dans certains milieux d'où le fanatisme irréligieux semblait devoir l'exclure. Nous pouvons nous applaudir de ce succès; mais nous devons en remercier Dieu et, de notre côté, travailler sans relâche à l'augmenter et à l'étendre.

M. Brifaut, trésorier, lit le rapport suivant :

Compte détaillé des recettes et des dépenses de l'exercice écoulé du 1er avril 1884 au 31 mars 1885.

RECETTES.

Encaisse au 1er avril 1884. . . . . fr.	29,819	24
502 cotisations	7,530	»
2 rachats perpétuels	300	»
Une part de fondateur	500	»
Vente de publications.	290	80
818 abonnements à la *Revue des questions scientifiques*	14,506	88
Remboursement d'une obligation Guillaume-Luxembourg.	500	»
Coupons du portefeuille	2,436	»
Intérêts en banque au 30 juin 1884	440	08
— — au 31 décembre 1884 . . .	534	90
TOTAL. . . fr.	56,857	90

DÉPENSES.

Frais de bureau et voyages . . . . fr.	318	35
Frais de recouvrement et salaire d'un commis . .	199	40
Frais de sessions	487	10
Impression et expédition des *Annales* et des circulaires	4,307	29
Revue des questions scientifiques :		
a) Direction et collaboration.	6,412	70
b) Impression et expédition	9,915	11
Indemnité au secrétaire	500	»
Indemnités aux secrétaires des sections	450	»
Achat de fonds publics (reliquat de compte) . .	67	30
Subside pour recherches scientifiques.	250	»
Encaisse au 31 mars 1885	33,950	65
TOTAL. . . fr.	56,857	90

Situation du capital au 31 mars 1885.

CAPITAL SOCIAL.

Actif. 7400 francs. Emprunt de l'État belge 4 °/₀ ancien à fr. 102,50, intérêts non compris	7,585	»		
1,500 francs. Emprunt de l'État belge 3 °/₀ à fr. 87,25, intérêts non compris	1,308	75		
30 actions privilégiées du chemin de fer de Bruxelles-Lille-Calais, à fr. 415, intérêts non compris . .	12,450	»		
Espèces à placer en fonds publics provenant :				
1° De cinq rachats perpétuels .	750	»		
2° D'une part et demie de fondateur	750	»		
			22,843	75
Passif. 29 ½ parts de fondateur de 500 francs	14,750	»		
32 rachats perpétuels de 150 fr.	4,800	»		
			19,550	»
Excédent d'actif . . . . fr.			3,293	75

Réserve.

10,000 francs. Emprunt de l'État belge, 4 °/₀ nouveau, à fr. 102,40, intérêts non compris . . fr.	10,240	»
10,000 francs. Obligations de la Caisse d'annuités dues par l'État à 4 $1/2$ °/₀, à 111 francs, intérêts non compris	11,100	»
52 obligations du chemin de fer Guillaume-Luxembourg 3 °/₀, à 406 francs, intérêts non compris.	21,112	»
Total. . . . fr.	42,452	»

L'assemblée nomme, pour vérifier le compte rendu du trésorier, MM. Ch. Lagasse et Otto.

M. le Dr Cousot donne ensuite une conférence sur *Le Microbe et sa fonction,* que nous résumons ici brièvement, bien qu'elle ait été publiée *in extenso* dans la *Revue des questions scientifiques* (t. XVIII, p. 103).

Le conférencier présente un rapide tableau du monde des microbes; il décrit leurs formes, leurs habitudes, leur prodigieuse fécondité, sans s'arrêter à des classifications encore discutables.

Il indique les milieux dans lesquels on les trouve et les lois de leur diffusion dans les eaux, le sol ou l'atmosphère. Il montre leur influence sur la pureté des divers milieux de la vie, où ils pullulent en raison de la densité des populations; il indique les conséquences qui découlent de ces faits pour la santé publique.

Avant d'aborder la fonction du microbe, M. Cousot indique, parmi les problèmes que soulèvent ces études, celui de la génération spontanée, qu'elles renversent, et celui du transformisme auquel elles semblent peu favorables.

Abordant la fonction du microbe, le conférencier montre dans le microbe l'organe essentiel des fermentations; il constate l'énorme puissance de réduction des infiniment petits. Il montre le microbe, ouvrier invisible mais tout-puissant de la mort, dont il complète l'œuvre, et auxiliaire essentiel de la vie, dont il rend la permanence possible en restituant à des existences nouvelles les éléments chimiques dégagés.

Il indique certaines expériences nouvelles qui semblent donner une extrême importance à la présence des microbes dans la végétation et la nutrition des êtres supérieurs.

Bienfaisante jusqu'ici, la fonction du microbe devient nuisible; le conférencier indique à grands traits l'histoire de la doctrine des microbes morbigènes, il la montre établie scientifiquement pour bon nombre d'affections, très probable pour certains groupes de maladies. Il fait remarquer la rigueur des procédés de démonstration employés et le peu de fondement des objections qu'on oppose à la féconde doctrine des germes animés.

De quelle manière agissent les microbes dans la production des maladies; quelles sont les conséquences acquises ou promises par ces études à la thérapeutique? Tels sont les deux derniers points traités par le conférencier, qui termine son étude en montrant qu'ici encore la science justifie la belle devise de la Société scientifique : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*

IV

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 14 AVRIL 1885.

M. l'abbé Gérard Smets, docteur en sciences de l'Université de Louvain, fait une conférence sur les *Cétacés à fanons*. La *Revue des questions scientifiques* (t. XVII, p, 435) a publié cette conférence sous le titre : *Les Mystacocètes*. Nous en donnons ici un court résumé.

La mer nourrit un grand nombre de véritables mammifères, les phoques, les sirénéens et les cétacés. C'est à ce dernier groupe qu'appartiennent les cétacés à fanons ou mystacocètes dont il a été question dans cette conférence.

Après avoir jeté un coup d'œil sur l'ordre des cétacés, le conférencier aborde les mystacocètes. Un de leurs caractères distinctifs est l'absence de dents à l'âge adulte et la présence au palais de lames flexibles, les fanons, qui servent à l'animal de tamis pour expulser l'eau engouffrée dans son énorme gueule avec la nourriture. Ce n'est donc pas par les narines que ces animaux

expulsent cette eau ; les artistes ont tort de représenter les baleines comme lançant des colonnes d'eau par les narines. Le « souffle » des baleines est composé de vapeur d'eau qui se condense et aussi d'un peu d'eau pulvérisée.

Le conférencier décrit en détail le squelette de ces animaux et il montre que chaque partie du squelette, et surtout la caisse tympanique, peut suffire pour distinguer les espèces.

Les mystacocètes sont les colosses de la création : le conférencier montre qu'ils confirment ainsi la loi, connue pour les animaux terrestres, que « leur taille est proportionnée à l'étendue du continent qu'ils habitent ». Ils présentent d'ailleurs sous ce rapport un curieux contraste avec les mammifères terrestres. Ceux-ci sont arrivés à leur apogée par le nombre, la variété des formes et la taille des individus aux époques antérieures de notre globe, tandis que les mystacocètes ont continué à croitre en taille jusqu'à l'époque actuelle.

Les mœurs, les jeux, les voyages, les parasites de ces animaux ont été successivement décrits.

A la distribution géographique, le conférencier a insisté fortement sur le fait que les *baleines véritables* sont confinées dans leur océan et leur hémisphère, qu'elles ne se rencontrent pas sous l'équateur, tandis que les autres mystacocètes, les *mégaptères comme les balénoptères,* se rencontrent sous l'équateur et passent d'un hémisphère à l'autre.

Parmi les mystacocètes, il y a d'abord les baleines véritables, qui ont la tête très développée, les fanons très longs, pas de nageoire dorsale, la gorge et le ventre lisses.

Les *mégaptères* ont la tête moins développée, les fanons courts, une bosse sur le dos, des plis sous la gorge, les nageoires thoraciques très développées.

Les *balénoptères* ont aussi la tête moins grande, les fanons courts, une nageoire dorsale, des plis sous la gorge et le ventre.

Le conférencier les passe successivement en revue en donnant les particularités de leur squelette, de leurs mœurs, de leur distribution géographique, etc. Il insiste à différentes reprises sur la grande variabilité de l'espèce dans les cétacés et surtout

dans ce groupe. La fixité absolue de l'espèce n'existe pas, dit-il; l'espèce a varié et variera encore; mais, si l'on consulte les faits, il existe des limites à cette variabilité, limites entre lesquelles oscillent les caractères de l'espèce. Le conférencier montre comment les *races* peuvent se former dans ces animaux.

Tous les mystacocètes vivent dans la haute mer, ils ne se rapprochent que rarement des côtes.

Ceux qui échouent sur notre littoral sont souvent des individus répudiés par leur gamme, ou blessés, ou frappés de mort naturelle. Le conférencier rend compte du gisement d'Anvers, si riche en mystacocètes fossiles, par des échouements réguliers, rendus plus fréquents qu'aujourd'hui par l'abondance même de ces animaux, par la disposition des côtes et de la terre ferme.

M. l'abbé Smets a rendu hommage aux travaux des cétologistes de ces dernières années ; il a montré surtout la part que notre illustre compatriote, M. Van Beneden, a prise à l'avancement de la cétologie.

V

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 15 AVRIL 1885.

La conférence de ce jour, donnée par M. Louis Dollo, avait pour sujet : *Les Iguanodons et les Mosasaures*. La Société s'est réunie, pour l'entendre, au Musée royal d'histoire naturelle, près des beaux exemplaires que possède cet établissement.

M. Dollo, aide-naturaliste au Musée, prend d'abord la parole devant la cage des iguanodons, dans la cour intérieure des musées. Il expose l'histoire de la découverte de l'iguanodon, puis celle des iguanodons de Bernissart. Il passe ensuite à une description succincte de l'animal et retrace, selon les données actuelles de la science, les mœurs probables de ce reptile. M. Dollo dit alors un mot de la sous-classe si remarquable des dinosauriens, à laquelle appartient l'iguanodon, sous-classe qui semble avoir joué, durant les temps secondaires, le même rôle que les grands mammifères pendant les époques tertiaire, qua-

ternaire et actuelle. Il montre qu'il y avait deux espèces, recueillies d'ailleurs à des niveaux différents, parmi les dinosauriens de Bernissart. Il appelle encore l'attention sur les autres fossiles : crocodiles, tortues, salamandres, poissons et végétaux, trouvés avec les iguanodons, et termine par quelques considérations sur l'âge des dépôts qui renfermaient cette faune et cette flore, et sur le mode vraisemblable d'enfouissement de tous les êtres qui la composent.

Immédiatement après, la Société se rend dans la salle dite d'Anvers, où l'on voit un certain nombre des poissons et des plantes dont il vient d'être question. Ayant fourni les explications nécessaires sur ces précieux restes, M. Dollo cède la parole à M. l'abbé Smets, docteur en sciences et conférencier de la veille, qui entretient la Société des cétacés tertiaires réunis dans la salle d'Anvers. Quelques pas plus loin, M. Dollo signale le *Pachyrhynchus Gosseleti,* tortue marine landenienne qui se nourrissait de coquilles, et le *Gastornis Edwardsii,* grand oiseau de la même époque, qui habitait en ces temps reculés la Belgique et le nord-est de la France. On arrive enfin devant les mosasaures, dont M. Dollo raconte la découverte et décrit la structure, ainsi que les mœurs.

L'auditoire se dirige alors vers le moulage du fémur, ou os de la cuisse, de l'*Atlantosaurus,* le plus gigantesque des dinosauriens connus. Ce fémur dépasse la taille d'un homme ordinaire.

On traverse ensuite la salle d'ostéologie, où M. l'abbé Smets reprend la parole pour montrer diverses pièces anatomiques auxquelles il a fait allusion le jour précédent, et l'on descend dans les ateliers de paléontologie. M. Dollo y explique l'extraction, la préparation et le montage des iguanodons de Bernissart, ainsi que les opérations qu'on fait actuellement subir à l'énorme mosasaure de Mesvin-Ciply.

Toast prononcé par M. G. Dewalque, président, au banquet du mercredi 15 avril 1885.

Messieurs,

Fidèle aux excellentes traditions de la Société scientifique de Bruxelles, je me lève pour vous proposer un double toast, écho sincère de deux nobles sentiments qui se confondent pour ainsi dire dans toute cause catholique : la foi et le patriotisme. J'ai l'honneur de vous proposer de boire à la santé du Pape et du Roi.

Il y aura tantôt dix ans, vous avez inscrit, Messieurs, à la première page de votre programme, cette grande parole d'un grand concile : Entre la Foi et la Raison, il ne peut exister de dissentiment sérieux. Vous teniez à signaler, au seuil même de votre œuvre, l'esprit qui anime votre société, le principe lumineux et fécond qui vous dirige et vous soutient dans vos recherches. Je suis donc sûr d'être l'interprète de vos sentiments en vous proposant d'acclamer le nom glorieux entre tous de l'incorruptible gardien de la vérité, de l'infaillible chef de l'Église catholique, le nom de Léon XIII.

Messieurs, nous cultivons tous quelque coin de ce vaste champ de la science que le Créateur a livré aux investigations de l'intelligence humaine. Notre tâche quotidienne est d'y découvrir le trésor caché de la vérité, les lois générales de l'univers, les divines harmonies de la nature. Or, nous savons et nous affirmons que les lois du monde physique et celles du monde moral s'accordent à merveille et ne forment qu'un vaste et incomparable monument, dont l'unité fait la beauté.

Eh bien, Messieurs, dans ces jours troublés, où tout est remis en question, même les principes immuables de la logique, nous devons bénir mille fois la Providence d'avoir allumé pour nous ce grand fanal qui s'appelle l'Église catholique. Il nous est doux de nous reposer dans cette fortifiante conviction que son divin fondateur est *la voie, la vérité et la vie*, et qu'il nous a laissé sur cette terre un représentant infaillible.

Pourrions-nous, d'ailleurs, oublier sans ingratitude ce que l'Église et les papes ont fait pour la science, comme ils l'ont constamment honorée, protégée, récompensée? Pourrions-nous

oublier qu'au lendemain de la chute de l'empire romain, ils ont recueilli et sauvé des mains des barbares victorieux les précieuses épaves de l'antique civilisation? que les cloîtres chrétiens ont abrité ces illustres débris? que d'innombrables abbayes ont été des foyers de lumière pendant cette longue et féconde nuit qu'on appelle le moyen âge? qu'à l'époque de la Renaissance, c'est encore aux papes que nous devons la conservation des richesses classiques échappées au sac de Byzance, et qu'ils en ont fait don aux générations dont nous sommes issus? que la Papauté a créé par toute l'Europe ces nombreuses universités dans lesquelles le flambeau de la science et des lettres a jeté tant d'éclat?

Ai-je besoin de vous dire, Messieurs, que Léon XIII est l'une des figures les plus remarquables de cette série de pontifes auxquels la science doit tant de gratitude? Ai-je besoin de rappeler ses efforts pour la restauration des études philosophiques et historiques, ou son zèle infatigable pour la diffusion de l'Évangile dans le monde entier? Ah! l'histoire impartiale lui conservera des pages glorieuses et pleines d'une reconnaissance bien méritée.

Messieurs, enfants soumis de l'Église, nous avons une autre mère, la Patrie, dont nous nous proclamons les fils dévoués. Cette patrie, où nos pères ont lutté et souffert pour nous la rendre pacifique et heureuse, où nous luttons à notre tour pour assurer la liberté et l'honneur de nos enfants, elle règne dans nos cœurs et peut compter sur tous nos dévouements. Qui, d'entre nous, Belges, ne serait prêt à tout pour la conserver indépendante et libre sous la dynastie de son choix? Et comme la patrie s'incarne en quelque sorte dans l'auguste personne de son chef, nous porterons tous ensemble la santé du Roi, de Léopold II, qui est la personnification la plus haute de la Belgique, le gardien inviolable de nos libertés, de cette Constitution qui nous est d'autant plus chère qu'elle est plus menacée, et pour laquelle nous sentons battre dans nos cœurs le sang généreux que nous ont transmis les grands citoyens de 1830!

C'est au nom d'une de ces libertés que nous sommes réunis pour proclamer que la Foi, loin d'être l'ennemie, est l'alliée de la Science. Honneur au Roi, qui a juré de protéger et de défendre ces inappréciables libertés!

Notre Société, Messieurs, connait les titres particuliers de S. M. Léopold II à la reconnaissance des amis des sciences et des lettres; ils sont trop nombreux, trop publics, dirai-je, pour être rappelés ici; personne n'ignore la protection qu'il accorde aux nobles travaux de l'esprit humain et la munificence avec laquelle il sait les récompenser. Mais vous ne me pardonneriez pas de passer sous silence la glorieuse entreprise du Roi des Belges pour la civilisation du Congo, entreprise à laquelle le congrès de Berlin vient de donner une suprême consécration. Il y a dix ans, dans votre première session annuelle, vous avez appelé les bénédictions d'en haut sur une œuvre destinée à porter les bienfaits du christianisme jusqu'au cœur de l'Afrique : en remerciant la Providence de sa protection, félicitons aujourd'hui le Roi des Belges d'avoir heureusement exécuté ce grand dessein, qui fera la gloire de son règne et fournira un beau chapitre à l'histoire de l'Église.

Ainsi donc, Messieurs, portons d'une seule voix la santé du Pape et du Roi! A Léon XIII et à Léopold II!

VI

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 16 AVRIL 1885.

Les deux commissaires nommés lundi dernier, MM. Ch. Lagasse et Otto, proposent à l'Assemblée d'approuver les comptes. Cette proposition est adoptée.

M. le Dr Desplats fait ensuite une conférence sur la *Suggestion dans l'état hypnotique*, que nous résumons ici brièvement.

On ne peut plus contester la réalité des phénomènes de suggestion; ils ont été trop souvent constatés depuis quelques années. Le difficile est de savoir dans quelles conditions et sur quels sujets ils peuvent être provoqués. Quelques expérimentateurs prétendent que bien peu de sujets sont réfractaires; mais ce n'est pas l'opinion générale, un certain degré de maladie serait nécessaire. Quant aux conditions dans lesquelles la suggestion pourrait se produire, elles sont très diverses : l'acte suggéré peut être provoqué et exécuté pendant le sommeil hypnotique; provoqué pendant le sommeil, il peut être exécuté pendant la

veille; enfin il peut être provoqué et exécuté pendant la veille.

Ces faits, s'ils sont exacts et aussi fréquents que le disent MM. Liégeois et Bernheim, doivent avoir d'importantes conséquences au point de vue médical, au point de vue moral et au point de vue social. M. Desplats s'efforce de démontrer que le dogme du libre arbitre et de la responsabilité n'est pas atteint par ces faits.

Il termine en recommandant de ne pas se laisser hypnotiser et de ne pas hypnotiser sans motif et sans garanties. Si l'hypnotisation et la suggestion produites dans un but thérapeutique et par un médecin prudent sont sans inconvénients et ont même des avantages, il n'en est pas de même de l'hypnotisation et de la suggestion expérimentales. Quant à l'hypnotiseur, il court le risque, s'il n'a un esprit très ferme et des principes très arrêtés, de sortir du monde réel pour entrer dans un monde imaginaire où il ne trouvera que déceptions.

Le conférencier a peine à admettre la suggestion absolue, complète. Il ne croit pas que le sujet à qui l'on suggère un crime, quelque acte contraire aux principes moraux profondément gravés dans son esprit, accomplisse cet acte et se jette bénévolement dans des situations que sa conscience réprouve. De bons esprits, s'appuyant sur des faits bien établis, semblent se rallier à la thèse contraire. Quoi qu'il en soit, il faut admettre que la suggestion existe avec la plupart de ses conséquences, et l'on ne saurait trop approuver le conférencier quand il engage le public à ne pas abuser de ces choses merveilleuses. Il faut laisser aux pionniers de la science le soin d'élucider ces difficiles problèmes. Eux seuls ont le droit de s'exposer à ces dangers qui ne sont pas imaginaires, et le public aura le loisir d'en profiter. Après tout, ce n'est pas le rôle le plus difficile; c'est celui auquel il ne coûte rien de se rallier.

M. le Président proclame ensuite le résultat des élections (voir p. 45 la composition du bureau et du conseil).

M. le Dr Desplats, président élu pour 1885-1886, prend place au fauteuil, et, après avoir remercié l'assemblée, il déclare la session close.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

De la pseudo-taille des silex de Thenay, par É. d'Acy. (Extrait des *Bulletins de la Société d'anthropologie,* séance du 5 mars 1885.) — Paris, 1885.

Bibliothèque de la nature. — Les métaux dans l'antiquité et au moyen âge. — L'étain, par M. Germain Bapst. — Paris, 1884.

Caverne sépulcrale du bel âge du bronze, à Sinsin (Namur), par Alf. Bequet. (Extrait des *Annales de la Société archéologique de Namur.*)

Traité élémentaire des mesures électriques par H.-R. Kempe, traduit de l'anglais sur la troisième édition, par H. Berger, directeur-ingénieur des télégraphes. — Paris, 1885.

Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al Dr Enrico Guglielmo Mattia Olbers. Memoria di B. Boncompagni. (Estratto dagli *Atti dell' Accademia pontificia de'nuovi lincei.*) — Roma, 1884.

Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre ; ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen von Dr Georg Cantor. — Leipzig, 1883.

La première page de Moïse et l'histoire de la terre, par le P. A. Castelein, S. J., 1884.

Traité élémentaire d'électricité, avec les principales applications, par R. Colson, capitaine du génie. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Détermination, à l'aide d'un appareil nouveau, du coefficient de diffusion des sels en solution et des variations que cette quantité éprouve avec la température, par P. De Heen. (Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1884.

Détermination d'une relation empirique entre le coefficient de frottement intérieur des liquides et les variations que celui-ci éprouve avec la température, par M. P. De Heen. (Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1884.

Relations théoriques entre le coefficient de dilatation, la chaleur interne de vaporisation et les chaleurs spécifiques des corps pris à l'état liquide et à l'état de vapeur, par M. P. De Heen. (Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1884.

L'obélisque de Salmanasar II. — Une curiosité assyrienne au Musée royal des antiquités, à Bruxelles, par Alph. Delattre, S. J. (Extrait de la revue *Précis historiques,* 1885.) — Bruxelles.

Mémoire adressé à M. Jules Vandenpeereboom, ministre des chemins de fer, postes et télégraphes, à l'appui de la demande de concession téléphonique formulée pour l'agglomération liégeoise, par M. Léon De Locht-Labye, ingénieur honoraire des mines. — Liège, 1885.

La renaissance de l'art religieux au XIXe siècle, par Ad. Delvigne, curé de Saint-Josse-ten-Noode.

Stries glaciaires dans la vallée de l'Amblève. — Filons granitiques et poudingues de Lamersdorf, par G. Dewalque. — Liège, 1885.

Les découvertes de Bernissart, par M. L. Dollo, ingénieur, aide-naturaliste au Musée royal de Bruxelles.

De quelques cosmologies récentes, par E. Domet de Vorges. — Paris, 1885.

Du tabac. — Troubles physiologiques et maladies de ceux qui en abusent. — Hygiène et thérapeutique, par le Dr Dubois, de Libin. — Namur, 1885.

Apologie scientifique de la foi chrétienne, par le chanoine F. Duilhé de Saint-Projet. — Paris, 1885.

Intorno ad un episodio non ancora chiarito del processo di Galileo. — Nota del prof. Antonio Favaro. — Venezia, 1882.

Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galileo, per Antonio Favaro. — Venezia, 1881.

De la sensation et de la pensée. — Dissertation pour le doctorat en philosophie selon St Thomas, par Th. Fontaine, docteur en droit. — Louvain, 1885.

La diphtérie considérée principalement au point de vue de ses causes, de sa nature et de son traitement, par le Dr X. Francotte, seconde édition, 1885.

De l'agaricine comme antisudorifique, par le Dr X. Francotte. — Liège, 1885.

Un cas de paralysie alcoolique, névrite dégénérative multiple d'origine alcoolique, par le Dr X. Francotte. — Liège, 1885.

Recueil de problèmes d'arithmétique, à l'usage des écoles moyennes, des écoles normales, des classes d'humanités et des cours professionnels, par l'abbé E. Gelin, docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques et de physique au collège St-Quirin, à Huy.--Namur, 1885.

Traité d'arithmétique élémentaire, à l'usage des cours professionnels, des candidats aux écoles spéciales des universités et à l'école militaire de Bruxelles, par l'abbé Gelin. — Deuxième édition, 1885.

Précis d'arithmétique à l'usage des écoles moyennes, des écoles normales et des classes d'humanités, par l'abbé Gelin, 1885.

Les fers et les aciers modernes, considérés à un point de vue rationnel et sous celui de leurs propriétés mécaniques et électriques, par L. de Gerando, ingénieur de la marine de l'Etat. — Paris, 1884.

Nouveaux procédés de régulation des galvanomètres (boussoles des tangentes). Nouvelles méthodes de détermination des forces électromotrices et des résistances des piles, par L. de Gerando, ingénieur de la marine de l'État. Seconde édition. — Paris, 1885.

Sur quelques conséquences de la formule de Green et sur la théorie du potentiel, par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain. (Extrait du *Journal de mathématiques pures et appliquées.*) — Paris, 1884.

L'équation du beau, conférence faite au Cercle polytechnique de l'Université de Bruxelles, par Hilaire Giuresco, polytechnicien, rédacteur au *Telegraphul.* — Ixelles-Bruxelles.

Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles, par M. Haton de la Goupillière. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*) — Paris, 1885.

Sur les fonctions holomorphes, par M. Hermite. (Extrait du *Journal de mathématiques pures et appliquées.*) — Paris, 1885.

Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite. (Extrait des *Acta mathematica.*) — Stockholm, 1884.

Recherches sur la flore de la Loire, par l'abbé J. Hervier. Premier fascicule. — Saint-Étienne, 1885.

Électricité et magnétisme, par Fleeming Jenkin, professeur de mécanique à l'Université d'Édimbourg. (Traduit de l'anglais.) — Paris, 1885.

Construction des voies ferrées dans les stations, traversées et bifurcations, par V. Lallemand, conducteur principal des ponts et chaussées. Première partie (avec supplément) : voies droites; seconde partie : voies courbes. In-8°, avec planches in-4°. — Bruxelles, 1881 et 1882.

Discussion des observations d'orages faites en Belgique pendant l'année 1879, suivie d'un appendice comprenant les observations recueillies depuis un siècle, par A. Lancaster, météorologiste-inspecteur à l'Observatoire royal de Bruxelles. — Bruxelles, Hayez 1885.

Sur l'origine du limon des plateaux, par M. A. de Lapparent.

De la nécessité de l'enseignement chrétien pour la complète intelligence de la langue française, par l'abbé J. Lefebvre, agrégé des lettres, professeur à la faculté de théologie. — Rouen, 1884.

Le père, la mère et l'enfant, par le Dr Lefebvre. Troisième édition, revue et corrigée. — Louvain.

Essai sur la synthèse des forces physiques, par le P. Ad. Leray, prêtre eudiste. Constitution de la matière. Mécanique des atomes. Élasticité de l'éther. — Paris, 1885.

Les secrets du coloris, révélés par l'étude des harmoniques, par G. De Lescluze, pbr. — Bruges, 1885.

Accord de la science avec le premier chapitre de la Genèse, par M. Lavaud de Lestrade, prêtre de St-Sulpice — Paris, 1885.

Transformisme et darwinisme, réfutation méthodique, par M. Lavaud de Lestrade, prêtre de St-Sulpice. — Paris, 1885.

Nouveau cours d'histoire naturelle. Zoologie. Anatomie et physiologie animales, par Paul Maisonneuve, docteur en médecine. — Paris, 1885.

Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène-Charles Catalan, par P. Mansion, professeur ordinaire à l'Université de Gand. (Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.*) — Bruxelles, 1885.

Recherches expérimentales sur le mécanisme de fonctionnement des centres psycho-moteurs du cerveau, par le Dr J.-M.-L. Marique, chef du service des autopsies à l'hôpital St-Jean. Thèse d'agrégation présentée à la faculté de médecine de Bruxelles. — Bruxelles, 1885.

Traité élémentaire d'électricité, par James Clerk Maxwell, M. A., traduit de l'anglais. — Paris, Gauthier-Villars, 1884.

Traité d'électricité et de magnétisme, par J. Clerk Maxwell, M. A., traduit de l'anglais, 1er fascicule. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Leçons élémentaires de télégraphie électrique, par L. Michaut et M. Gillet. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Le chauffage à flamme libre de Frédéric Siemens, par E. Miest, ingénieur. (Extrait des *Mémoires de l'Union des ingénieurs de Louvain,* 1885.) — Bruxelles.

De l'accord entre les indications des couleurs dans la scintillation des étoiles et les variations atmosphériques, par Ch. Montigny, membre de l'Académie royale de Belgique. (Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* 3e série, t. IX, nº 2.) — Bruxelles, 1885.

Le déluge biblique devant la foi, l'écriture et la science, par Al. Motais, prêtre de l'Oratoire de Rennes, professeur d'Écriture sainte et d'hébreu au Grand-Séminaire, chanoine honoraire. — Paris, 1885.

Les Chamites en Europe. — Essai sur l'origine des Ibères, des Ligures, Sicanes, Sicules et des Basques de France et d'Espagne, par Pedro Nada. Supplément du *Muséon,* août 1885. — Louvain, 1885.

Les anciennes populations de la Colombie, par M. le marquis de Nadaillac. (Extrait des *Matériaux pour l'histoire primitive et naturelle de l'homme.*) — Paris, 1885.

L'homme tertiaire, par le marquis de Nadaillac, correspondant de l'Institut. — Masson, Paris, 1885.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France.*) — Paris.

Coordonnées parallèles et axiales, méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduits de la considération des coordonnées parallèles, par Maurice d'Ocagne. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Sur une transformation polaire des courbes planes, par M. Maurice d'Ocagne.

Note sur les raccordements paraboliques, d'après M. d'Ocagne. (Extrait de *Mathesis,* t. V, 1885.)

Sur quelques propriétés générales des surfaces algébriques de degré quelconque, par M. Maurice d'Ocagne. — Paris.

Monographie de la symédiane, par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées. (Extrait du *Journal de mathématiques élémentaires.*) — Paris.

Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires réciproques, par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées.

Sur les transformations centrales des courbes planes, par M. Maurice d'Ocagne, élève-ingénieur des ponts et chaussées.

Sur la droite moyenne d'un système de droites quelconques situées dans un plan, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France.*) — Paris.

Ueber die Einfuhrung eines Normalmeridians und der Weltzeit nach den Resolutions der Washingtoner Konferenz, von Prof. Th. von Oppolzer. (Einzel-Abdruck aus dem Mai-Heft der *Deutschen Revue.*) — Breslau, 1885.

Ueber Weltzeit. — Ein Vortrag gehalten im Vereine zür Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien, am 8 April 1885, von Theodor von Oppolzer. — Wien, 1885.

Théorie de la décomposition des nombres en une somme de cinq carrés, par le P. Th^{ie} Pepin, S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.*) — Rome, 1884.

Théorie des fonctions homogènes du troisième degré à deux variables, par le P. Th^{ie} Pepin, S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.*) — Rome, 1884.

Solution des deux équations $13x^4 - 11y^4 = 2z^2$, $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$, par le P. Th^{ie} Pepin, S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*). — Rome, 1885.

Traité de géométrie élémentaire, par Aug. Poulain, — 1re partie. — Lille, 1885.

La crise agricole et l'avenir de l'agriculture, par A. Proost, professeur à l'Université de Louvain. — Louvain, 1885.

Manuel de chimie agricole et de physiologie végétale et animale appliquée à l'agriculture, par A. Proost, professeur à l'Université de Louvain. — Louvain, 1884.

Elephant pipes in the Museum of the Academy of natural sciences Davenport, Iowa, by Charles E. Putnam. — Davenport, Iowa, 1885.

Patents. — India, Ceylon, Straits-Settlements, and Hong-Kong, by H. H. Remfry. — Calcutta, 1885.

Comice agricole de Lille. — Essai des beurres par le dosage des acides gras volatils, par M. Ch.-Ernest Schmitt, professeur à la Faculté libre des sciences de Lille. — Lille, 1884.

Ocean and air currents, by Thomas-D. Smellie, Fellow of the Surveyors' Institution. — Glasgow, 1885.

La création et l'œuvre des six jours, études scientifiques et apologétiques, par J.-J.-D. Swolfs, professeur au Petit-Séminaire de Malines, 3e édit., 1885.

Identité des principes de dualité et de polarité, par M. Gaston Tarry. — Alger, 1885.

S. Thos y Codina. — Andorra; reconocimiento fisico-geologico-minero. — Barcelona, 1885.

Something about natural Gas: its advantages, use, supply and economies, by George-H. Thurston. — Pittsburgh, 1885.

Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation, par J. De Tilly, membre de l'Académie royale (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e sér., t. IX, pp. 216-235).

Les langues de l'Asie centrale, conférence faite au VIe Congrès international des Orientalistes à Leide, par J. Van den Gheyn, S. J. — Leide, 1884.

L'origine européenne des Aryas, par J. Van den Gheyn, S. J. — Anvers, 1885.

Histoire d'une goutte d'eau, par G. Vander Mensbrugghe. — Bruxelles.

Notice sur J.-A.-F. Plateau, membre de l'Académie, par G. Vander Mensbrugghe. — Bruxelles. Hayez, 1884.

Téléphonie et télégraphie simultanées. — Exposé théorique et pratique du système de téléphonie à grande distance de M. F. Van Rysselberghe dans ses rapports avec la télégraphie, par Éd. Buels. — Bruxelles, 1885.

Compositions d'analyse et de mécanique données depuis 1869 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques, suivies d'exercices sur les variables imaginaires, par É. Villié, ancien ingénieur des mines, docteur en sciences, professeur à la Faculté libre des sciences de Lille. — Paris Gauthier-Villars, 1885.

Climatologie de Bruxelles, par J. Vincent, météorologiste à l'Observatoire royal. — Bruxelles, Hayez 1884.

Pouvoir calorifique du gaz d'éclairage par M. Aimé Witz. (Extrait des *Annales de Chimie et de Physique*, sixième série, t. VI, octobre 1885.) — Paris.

Le café, sa culture et sa préparation. Essai publié à l'occasion de l'Exposition universelle d'Anvers, par Josef Zuntz. — Bonn, 1885.

La profilaxis Ferran. — El cólera experimental atenuado y la inmunidad del cólera natural, por el Dr D. Manuel Zuriaga. — Valencia, 1885.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique, t. XVIII et t. XIX (troisième série, t. III et t. IV). — Bruxelles.

Annales de la Société malacologique de Belgique. — Tome XV (deuxième série, t. V). Fascicule I, année 1880. — Bruxelles.

Bulletin de la Société belge d'électriciens, tome II, 1885. — Bruxelles.

Congrès de navigation intérieure. — Map of the Manchester ship canal, with a description of the plans prepared for the session 1885.

Fortieth annual Catalogue of the Officers, faculty and students of the University of Notre-Dame, for the academie year 1883-84. — Notre-Dame, Indiana, 1884.

Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. — Marzo, aprile-maggio, 1885, supplemento al fasc. VI, giugno 1885. — Genova.

Guide-Programme du premier congrès international de navigation intérieure. — Bruxelles, 1885.

L'Idrologia e la climatologia medica, Gazzetta delle stazioni idrologiche e climatiche specialmente italiane, diretta dai signori L. Chiminelli e G. Faralli. — Anno VII, n° 7, 25 luglio 1885. — Firenze.

Journal de l'École polytechnique publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. — Cinquante-quatrième cahier. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Journal of the New York Microscopical Society, february, 1885. — New York.

Mémoires publiés à l'occasion du Congrès international de navigation intérieure, tenu à Bruxelles du 24 mai au 2 juin 1885. — Bruxelles, 1885.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876-1878 ; XII, Zoologi, Pennatulida; XIII, Zoologi, Spongiadæ; XIV, Zoologi, Crustacea 1A et 1B.

Notice sur les travaux et titres scientifiques de M. L. de Bussy, directeur des constructions navales. — Gauthier-Villars, Paris, 1885.

Les nouveaux remèdes, journal bi-mensuel de chimie médicale, de pharmacologie, de thérapeutique et d'hydrologie, 1re année, n° 1. — Paris.

Observaciones magnéticas y meteorológicas del real colegio de Belen de la Compañia de Jesus en la Habana. — Año de 1875. — Habana, 1884.

OEuvre des Écoles chrétiennes dans le diocèse de Bourges. — Réunion générale du 18 janvier 1885.

Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, session 1881-82 et 1882-83.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique, tome XIII. — Bruxelles.

Procès-verbaux des séances du Congrès international de navigation intérieure, tenu à Bruxelles du 24 mai au 2 juin 1885. — Bruxelles, 1885.

Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. — Geodätische Arbeiten, Heft IV. — Das nördliche Dreiecknetz zur Verbindung der Haupt-Dreieckseiten Haarskallen-Stokvola und Spaatind-Näverfjeld. — Christiania, 1885.

Anno 1885. — Rivista di artiglieria e genio, Gennaio. — Roma.

St-Xavier's College Observatory. Observations météorologiques. — Juillet-décembre 1884; janvier-juin 1885.

Société belge de miscroscopie. — Annales, tome X. — Année 1883-1884. — Bruxelles, 1885.

Société géologique de Belgique. — Annales, t. XI, 1883-84.

Stonyhurst College Observatory. Results of meteorological and magnetical observations, 1883. Manresa Press, Roehampton, 1884.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh, session 1881-82 et 1882-83.

Udgivet af den norske Gradmaalingskommission. Vandstandsobservationer. III Hefte. — Christiania, 1885.

University of Notre-Dame. — The Notre Dame Scholastic. — Vol. XVIII, nº 19.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PRINCIPES

D'UNE

THÉORIE NOUVELLE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

PAR

P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand (*).

I

Préliminaires.

1. Objet de ce travail. La théorie des fonctions d'une variable réelle repose sur un lemme fondamental que l'on peut énoncer géométriquement comme il suit : « *Si une courbe plane* AIB, *continue entre les points* A, B, *et dont la tangente s'infléchit d'une manière continue entre ces points, est coupée par la sécante* AB, *il y a un point intermédiaire* I, *où la tangente est parallèle à* AB ».

(*) Nous avons trouvé l'idée fondamentale de ce travail en décembre 1875, mais en y introduisant une erreur, qui nous a été signalée obligeamment par M. Hermite. Nous avons fait connaître les points principaux de notre théorie à la Société scientifique de Bruxelles en janvier et mai 1878 (*Annales de la Société scientifique*, t. III, première partie, pp. 53, 57-58). Nous les avons publiés, en substance, dans le *Messenger of Mathematics*, 2d Series, t. VIII, pp. 17-20 (n° 86, juin 1878), et dans *Mathesis*, t. I, pp. 3-6 (janvier 1881).

Traduit en analyse, ce lemme équivaut au théorème de Rolle et à ceux de Lagrange et de Cauchy, contenus dans les formules suivantes :

$$\frac{FX - Fx_0}{X - x_0} = F'x_1, \qquad \frac{FX - Fx_0}{fX - fx_0} = \frac{F'x_1}{f'x_1}, \qquad x_0 < x_1 < X.$$

Le deuxième de ces théorèmes, $FX - Fx_0 = (X - x_0) F'x_1$, et, par suite, le premier et le troisième, qui sont équivalents, peuvent se déduire aussi de la relation plus précise

$$FX - Fx_0 = \int_{x_0}^{X} F'x dx,$$

le signe $\int$ signifiant, bien entendu, *limite de somme*.

Toutes les démonstrations rigoureuses du théorème de Taylor données jusqu'à présent pour les fonctions d'une variable réelle s'appuient, en dernière analyse, sur l'une ou l'autre des quatre propositions précédentes et procèdent toutes, au fond, de la même manière. On peut donc dire que, en réalité, il n'y a qu'une démonstration de ce théorème célèbre, celle de Cauchy.

Nous nous proposons de montrer, dans le présent travail, que le lemme géométrique énoncé plus haut contient aussi en germe les principes fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, et, en particulier, le théorème de Taylor étendu à ces fonctions.

On peut donc regarder ce lemme comme la source unique d'où découlent toutes les propriétés élémentaires des fonctions; ce qui ne paraîtra pas étonnant, si l'on réfléchit qu'il établit une relation élémentaire entre l'accroissement d'une fonction et la dérivée de celle-ci.

2. Notations. Dans ce qui suit, pour abréger, nous écrivons partout avec Gauss et Cauchy, i au lieu de $\sqrt{-1}$, et nous employons les notations $\Re(a + bi)$, $\Im(a + bi)$ de M. Weierstrass, pour désigner la partie réelle a et la partie imaginaire bi d'une expression imaginaire $a + bi$.

Par fonctions élémentaires, nous entendons les fonctions algébriques rationnelles, entières ou fractionnaires, les irrationnelles qui peuvent s'exprimer au moyen de radicaux, enfin les fonctions logarithmiques, les exponentielles et les fonctions circulaires (*).

2. Autres méthodes d'exposition de la théorie des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. La théorie des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire a été exposée plusieurs fois, par deux méthodes différentes de celle qui est donnée ici. On peut appeler ces méthodes, méthode de Cauchy et méthode d'Abel. La première s'appuie sur la théorie si délicate (**) des intégrales définies prises entre des limites imaginaires et est loin d'être élémentaire (***). D'ailleurs elle ne permet pas, croyons-nous, de trouver aisément les développements de $l(1+z)$ et de $(1+z)^m$, dans le cas où le module de z est égal à l'unité (****).

(*) Nous avons indiqué comment on peut définir les fonctions élémentaires d'une variable imaginaire, sans recourir aux propriétés des séries, et comment on peut en trouver les dérivées, dans notre *Résumé du cours d'analyse de l'Université de Gand* (Gand, 1877), nos 63-75, et dans la *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, pp. 358-364, 385-393.

(**) Délicate 1° parce qu'il est difficile de démontrer rigoureusement le théorème fondamental de Cauchy : *L'intégrale, le long d'un certain contour, d'une fonction synectique à l'intérieur de ce contour et sur ce contour, est nulle.* Dans la démonstration de Cauchy, par déformation du contour, on n'est pas certain que les déformations successives conduiront à réduire à zéro l'aire comprise dans le contour. La démonstration de Riemann par les intégrales doubles suppose établie, pour celles que l'on considère, la légitimité de l'interversion des intégrations ; 2° dans la démonstration du théorème de Taylor, basée sur le théorème de Cauchy, on démontre la formule $2\pi i f^n \gamma = 1.2.3 \ldots n \int \frac{fz\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}}$, par différentiation sous le signe par rapport à γ, de $2\pi i f\gamma = \int \frac{fz\,dz}{z-\gamma}$, procédé dont la légitimité peut être établie rigoureusement, mais ne l'est pas dans la plupart des traités. Sur le théorème de Cauchy rappelé plus haut, voir Falk, *Démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction complexe* (Mémoires de la Société des sciences d'Upsal, 7 février 1883). Upsal, Berling, 1883; 18 pages in-4°.

(***) M. Bertrand, qui expose les innombrables conséquences du théorème de Taylor quand la variable est imaginaire, dans son *Calcul différentiel*, est forcé de renvoyer, pour la démonstration de ce principe fondamental, à un chapitre assez avancé de son *Calcul intégral.*

(****) Nous indiquons toutefois, dans le dernier alinéa de ce travail, un moyen pour déduire notre formule fondamentale de la théorie de Cauchy. On peut trouver le développement de $l(1+z)$, dans tous les cas où il existe, en intégrant la série $1-z+z^2-z^3+\ldots$ de 1 à z (Thomae. *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen.* Zweite Auflage, Halle a/S, 1873. Voir pp. 36-37, note). Ce procédé ne diffère pas au fond de celui qui est exposé ici.

La méthode d'Abel est exposée, comme on sait, dans l'admirable Mémoire du géomètre norwégien sur le Binôme. Malgré le peu de connaissances préliminaires qu'elle suppose, elle est regardée à bon droit comme difficile, à cause de la subtilité des raisonnements et de la complication des calculs. D'ailleurs, comme l'a fait remarquer l'un des nouveaux éditeurs des *Œuvres complètes*, M. Sylow, les passages du Mémoire sur le Binôme où Abel se sert de son second théorème sur la continuité des séries doivent être modifiés, parce que ce théorème ne subsiste que moyennant certaines restrictions (*).

La méthode que nous exposons ici nous semble plus simple dans son principe que les précédentes, et elle conduit, par des calculs faciles, aux mêmes conséquences que celle d'Abel pour les fonctions élémentaires. Elle permet d'exposer *simultanément* les principes de l'analyse pour les fonctions d'une variable réelle et pour les fonctions d'une variable imaginaire et, à ce titre, elle sera bien accueillie, espérons-nous, par les géomètres qui s'intéressent aux perfectionnements des méthodes.

Elle a été esquissée avant nous, au reste, par Cauchy (1829) et récemment, à la forme près, par M. Darboux (1876) et M. Falk (1877), comme on le verra dans l'historique.

II

Fonction d'une variable imaginaire.

4. FONCTION D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE. Nous dirons, avec Riemann, qu'une expression $u = v + wi$ est une fonction Fz de $z = x + yi$, ou, avec Cauchy, qu'elle en est une fonction monogène, si $v = \varphi(x, y)$, $w = \psi(x, y)$ sont des fonctions réelles de x, y, telles que la limite de

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta v + i\Delta w}{\Delta x + i\Delta y}$$

(*) Voir *Œuvres complètes de* N.-H. ABEL, publiées par MM. L. Sylow et S. Lie (Christiania, Gröndahl et Sön, 1881), tome deuxième, pp. 302-305.

existe et soit unique, de quelque manière que Δx, Δy tendent simultanément vers zéro, même si le rapport de Δy à Δx ne tend vers aucune limite déterminée. On appelle cette limite la dérivée de Fz et on la désigne par $F'z$, si elle a elle-même une dérivée.

Les fonctions algébriques rationnelles de z, les fonctions irrationnelles qui peuvent s'exprimer au moyen des radicaux et les transcendantes qui se groupent autour de l'exponentielle, ont une dérivée et sont des fonctions de z, dans le sens indiqué ici (*).

5. Conditions nécessaires que doivent vérifier φ et ψ. Soit $\lim(\Delta F : \Delta z)$ égale à une quantité bien déterminée, que nous appellerons $F'z$. De la relation

$$Fz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

on déduit, en donnant dans z, à x seul un accroissement Δx,

$$\frac{F(z+\Delta x)-Fz}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x, y)}{\Delta x} + i\frac{\psi(x+\Delta x, y)-\psi(x, y)}{\Delta x},$$

puis, à la limite,

$$\frac{dF}{dx} = \varphi'_x(x, y) + i\psi'_x(x, y).$$

De même, en donnant à y seul un accroissement Δy, ou à z un accroissement $i\Delta y$, on trouve successivement

$$\frac{F(z+i\Delta y)-Fz}{i\Delta y} = \frac{\varphi(x, y+\Delta y)-\varphi(x, y)}{i\Delta y} + i\frac{\psi(x, y+\Delta y)-\psi(x, y)}{i\Delta y},$$

$$\frac{dF}{dyi} = \frac{1}{i}\varphi'_y(x, y) + \psi'_y(x, y).$$

Mais, par hypothèse, la limite de $[(F(z+\Delta z) - Fz) : \Delta z]$ est la même que $\Delta z = \Delta x$ ou que $\Delta z = i\Delta y$. Donc

$$F'z = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dyi},$$

(*) Voir les articles cités dans la note du n° 2. Toutes les fonctions considérées dans la suite ayant une dérivée qui est elle-même une fonction de z, nous représentons toujours la dérivée par $F'z$.

c'est-à-dire

$$\varphi'_x(x, y) + i\psi'_x(x, y) = \frac{1}{i}\varphi'_y(x, y) + \psi'_y(x, y).$$

Par conséquent,

$$\varphi'_x(x, y) = \psi'_y(x, y), \quad \varphi'_y(x, y) = -\psi'_x(x, y).$$

Exemple : La fonction $u = e^z = e^{x+yi}$, définie par l'égalité

$$u = e^x(\cos y + i \sin y),$$

est telle que $\varphi = e^x \cos y$, $\psi = e^x \sin y$. On trouve

$$\varphi'_x = e^x \cos y = \psi'_y, \quad \varphi'_y = -e^x \sin y = -\psi'_x.$$

6. Conditions suffisantes (*). Rien ne prouve que les conditions $\varphi'_x = \psi'_y$, $\varphi'_y = -\psi'_x$ soient toujours suffisantes pour que $\varphi + i\psi$ soit fonction de z. On peut indiquer un cas assez général où il en est ainsi. C'est celui où $\varphi'_x = \psi'_y$, $\varphi'_y = -\psi'_x$ sont fonctions continues de x et de y. On a alors, en désignant par (x_1, y_1), (x_2, y_2) des valeurs de x et de y, comprises entre x et $x + \Delta x$, y et $y + \Delta y$, comme nous le rappelons au numéro suivant,

$$\Delta v = \Delta x \varphi'_x(x_1, y_1) + \Delta y \varphi'_y(x_1, y_1), \quad \Delta w = \Delta x \psi'_x(x_2, y_2) + \Delta y \psi'_y(x_2, y_2).$$

Par suite, en ne conservant que des dérivées par rapport à x, on trouve

$$\Delta u = \Delta v + i\Delta w = (\Delta x + i\Delta y)\left[\varphi'_x(x_1, y_1) + i\psi'_x(x_1, y_1)\right]$$
$$+ i\Delta x\left[\psi'_x(x_2, y_2) - \psi'_x(x_1, y_1)\right] + i\Delta y\left[\varphi'_x(x_2, y_2) - \varphi'_x(x_1, y_1)\right],$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \varphi'_x(x_1, y_1) + i\psi'_x(x_1, y_1)$$
$$+ \frac{i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\left[\psi'_x(x_2, y_2) - \psi'_x(x_1, y_1)\right] + \frac{i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\left[\varphi'_x(x_2, y_2) - \varphi'_x(x_1, y_1)\right].$$

(*) Cette démonstration est nouvelle, croyons-nous. Nous ne nous appuyons en rien, dans la suite, sur ce n° 6. Toutes les fonctions considérées ont une dérivée, comme nous l'avons remarqué dans la note précédente.

Si $\Delta x, \Delta y$ tendent vers zéro, x_1, x_2 tendent vers x, et y_1, y_2 vers y; les rapports $[i\Delta x : (\Delta x + i\Delta y)]$, $[i\Delta y : (\Delta x + i\Delta y)]$ ne peuvent avoir une limite infinie, comme on le voit en posant $\Delta x = r \cos \alpha$, $\Delta y = r \sin \alpha$. Donc enfin $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \varphi'_x(x, y) + i\,\psi'_x(x, y)$.

7. Corollaire I. *Si la dérivée* F'z *d'une fonction* Fz *de* z *est constamment nulle,* F *est une constante par rapport à* x *et à* y. En effet, les dérivées

$$\frac{dF}{dx} = F'z, \quad \frac{dF}{dy} = iF'z,$$

sont nulles en même temps que $F'z$. Donc F ne dépend ni de x, ni de y.

II. Par suite, *deux fonctions de* z *qui ont même dérivée ne diffèrent que par une constante.*

III

Théorème fondamental.

8. Première forme. Soit $Fz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, ou $u = v + wi$, une fonction de z, de manière que

$$\varphi'_x(x, y) = \psi'_y(x, y), \quad \varphi'_y(x, y) = -\psi'_x(x, y),$$
$$F'z = \varphi'_x(x, y) + i\psi'_x(x, y)$$

Supposons cette fonction (c'est-à-dire φ et ψ) continue, ainsi que sa dérivée (c'est-à-dire φ'_x, ψ'_x), pour les valeurs de z correspondant aux points de la droite $y = ax + b$, passant par les points A (x_0, y_0), B (X, Y), de sorte que

$$a = \frac{Y - y_0}{X - x_0}, \quad b = y_0 - x_0 \frac{Y - y_0}{X - x_0}.$$

La fonction Fz est supposée continue depuis $z_0 = x_0 + y_0 i$

jusque $Z = X + Yi$ inclusivement, $F'z$ depuis z_0 jusque Z, inclusivement ou exclusivement (*).

Si x_1 et $y_1 = ax_1 + b$ sont les coordonnées d'un point I convenablement choisi entre A et B, on a, d'après le théorème de Lagrange, rappelé au n° 1,

$$\begin{aligned}
&\varphi(X, Y) - \varphi(x_0, y_0) = \varphi(X, aX + b) - \varphi(x_0, ax_0 + b) \\
&= (X - x_0)\left[D_x\varphi(x, ax+b)\right]_{x=x_1} = (X - x_0)\left[\varphi'_x(x, ax+b) + a\varphi'_y(x, ax+b)\right]_{x=x_1} \\
&= (X - x_0)\left[\varphi'_x(x_1, ax_1 + b) + \frac{Y - y_0}{X - x_0}\varphi'_y(x_1, ax_1 + b)\right] \\
&= (X - x_0)\,\varphi'_x(x_1, y_1) + (Y - y_0)\,\varphi'_y(x_1, y_1).
\end{aligned}$$

On peut encore écrire ce résultat sous la forme suivante, en remarquant que $\varphi'_y = -\psi'_x$,

$$\Delta v_0 = \Delta x_0 \varphi'_x(x_1, y_1) - \Delta y_0 \psi'_x(x_1, y_1).$$

Ajoutons au second membre

$$i\Delta y_0 \varphi'_x(x_1, y_1) + i\Delta x_0 \psi'_x(x_1, y_1),$$

et posons $z_1 = x_1 + y_1 i$, il deviendra

$$\Delta z_0\left[\varphi'_x(x_1, y_1) + i\psi'_x(x_1, y_1)\right] = \Delta z_0 F'z_1.$$

Donc enfin

$$\Delta v_0 = \mathfrak{R}\,\Delta z_0 F'z_1.$$

On prouve de même que

$$\Delta i w_0 = \mathfrak{J}\Delta z_0 F'z_2,$$

$z_2 = x_2 + y_2 i$ désignant une valeur de z correspondant à un point de AB intermédiaire entre A et B.

(*) Le théorème de Lagrange rappelé au n° 1 et que nous allons appliquer, ne suppose pas que la dérivée de la fonction considérée soit continue pour les valeurs extrêmes de la variable.

Par conséquent, puisque $\Delta u_0 = \Delta v_0 + i\Delta w_0 = FZ - Fz_0$,

$$FZ - Fz_0 = \Re \Delta z_0 F'z_1 + \Im \Delta z_0 F'z_2.$$

On peut écrire, pour abréger, quand $F'z$ a une expression compliquée,

$$FZ - Fz_0 = [\Delta z_0 F'z]_{(1,2)},$$

le second membre signifiant que l'on met à z l'indice 1, dans la partie réelle, l'indice 2 dans la partie imaginaire de $\Delta z\, F'z$.

9. Corollaire. *Théorème de Rolle généralisé.* Soit $FZ = Fz_0$. On aura alors

$$\Re\,(Z - z_0)F'z_1 = 0, \qquad \Im\,(Z - z_0)F'z_2 = 0$$

ou, en abrégé,

$$\big[(Z - z_0)\, F'z\big]_{(1,2)} = 0.$$

Remarques. I. Dans les expressions sous les signes $\Re$ et $\Im$, posons $Z - z_0 = re^{\omega i}$. On pourra faire sortir le facteur r de ces signes et écrire

$$\Re e^{\omega i} F'z_1 = 0, \qquad \Im e^{\omega i} F'z_2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad [e^{\omega i} F'z]_{(1,2)} = 0.$$

II. On ne peut pas démontrer, pour une variable imaginaire, un théorème analogue au théorème de Cauchy rappelé au n° 1, sauf si le rapport $[\Delta Fz_0 : \Delta fz_0]$ est réel ou purement imaginaire. Dans le cas général, on a

$$\frac{FZ - Fz_0}{fZ - fz_0} = \frac{\Re\,(e^{\omega i} F'z_1) + \Im\,(e^{\omega i} F'z_2)}{\Re\,(e^{\omega i} f'z_3) + \Im\,(e^{\omega i} f'z_4)},$$

comme corollaire évident du théorème fondamental, z_3 et z_4 étant des valeurs de z, intermédiaires entre z_0 et Z, probablement différentes de z_1 et z_2. Si le rapport est réel, $z_3 = z_1$, $z_4 = z_2$.

IV

Théorème de Taylor.

10. Forme du reste. Soient $fz, f'z, f''z, \dots f^{n-1}z$ une fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées continues de $z_0 = x_0 + y_0 i$ à $Z = X + Yi$ inclusivement, $f^n z$ sa dérivée $n^{\text{ième}}$, continue entre les mêmes limites, inclusivement ou exclusivement. La variable z passe par toutes les valeurs données par la formule $z - z_0 = re^{\omega i}$, où r varie de 0 à R, ω étant constant, de manière que $Z - z_0 = Re^{\omega i}$.

Considérons l'égalité

$$fZ = fz_0 + \frac{Z - z_0}{1} f'z_0 + \frac{(Z - z_0)^2}{1.2} f''z_0 + \dots + \frac{(Z - z_0)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{n-1}z_0 + \rho;$$

ρ est un reste, défini par cette égalité même, dont il s'agit de trouver une expression nouvelle. Posons

$$\rho = (Z - z_0)^p P,$$

p étant un exposant positif, et prenons la fonction auxiliaire

$$Fz = fZ - \left[fz + \frac{Z-z}{1} f'z + \frac{(Z-z)^2}{1.2} f''z + \dots + \frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{n-1}z + (Z-z)^p P\right].$$

On trouve immédiatement

$$Fz_0 = 0, \quad FZ = 0,$$

$$F'z = p(Z - z)^{p-1}P - \frac{(Z - z)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^n z.$$

La fonction Fz et sa dérivée $F'z$ sont continues de z_0 à Z; de plus, $FZ = Fz_0$. On a donc, d'après le théorème de Rolle généralisé (n° 9),

$$\mathfrak{R}(Z - z_0)F'z_1 = 0, \quad \mathfrak{J}(Z - z_0)F'z_2 = 0,$$

où

$$z_1 = z_0 + \theta_1(Z - z_0), \quad z_2 = z_0 + \theta_2(Z - z_0),$$

θ_1, θ_2 étant compris entre 0 et 1. La première de ces égalités devient, en remplaçant $F'z_1$ par sa valeur

$$\mathfrak{R}\left[p(Z-z_1)^{p-1}(Z-z_0)P - \frac{(Z-z_1)^{n-1}(Z-z_0)}{1.2\ldots(n-1)}f^n z_1\right] = 0,$$

ou, en remarquant que $Z - z_1 = (1-\theta_1)(Z-z_0)$ et divisant par $p(1-\theta_1)^{p-1}$,

$$\mathfrak{R}\left[(Z-z_0)^p P - \frac{(Z-z_0)^n(1-\theta_1)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}f^n z_1\right] = 0.$$

Mais $(Z-z_0)^p P = \rho$. Donc, en faisant passer un terme dans le second membre,

$$\mathfrak{R}\rho = \mathfrak{R}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_1)^{n-p}f^n z_1.$$

De

$$\mathfrak{J}(Z-z_0)F'z_2 = 0$$

on déduit, de même (*),

$$\mathfrak{J}\rho = \mathfrak{J}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_2)^{n-p}f^n z_2.$$

Donc, enfin, en réunissant $\mathfrak{R}\rho$ à $\mathfrak{J}\rho$, il vient

$$\rho = \mathfrak{R}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_1)^{n-p}f^n z_1 + \mathfrak{J}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)p}(1-\theta_2)^{n-p}f^n z_2.$$

Dans la suite, nous ferons $p = n$, ou $p = 1$, et nous écrirons

$$\rho_l = \mathfrak{R}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n}f^n z_1 + \mathfrak{J}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots n}f^n z_2,$$

$$\rho_c = \mathfrak{R}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta_1)^{n-1}f^n z_1 + \mathfrak{J}\frac{(Z-z_0)^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta_2)^{n-1}f^n z_2.$$

(*) On pourrait donner à p une valeur différente dans la partie réelle et dans la partie imaginaire du reste.

11. Vraies valeurs des expressions prenant la forme $\frac{0}{0}$. Soient fz, gz deux fonctions de z vérifiant les conditions du théorème de Taylor et, de plus, nulles ainsi que leurs $(n-1)$ premières dérivées pour $z=z_0$. Le rapport $[f(z_0+h):g(z_0+h)]$ sera égal à celui des quantités ρ_l relatives à ces fonctions. Supprimant dans ces restes ρ_l le facteur $[\mathrm{R}^n:(1.2.3\ldots n)]$, après avoir posé $h=\mathrm{Z}-z_0=\mathrm{R}e^{\omega i}$, nous trouverons

$$\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)}=\frac{\Re e^{\omega i}f^n(z_0+\theta_1 h)+\Im e^{\omega i}f^n(z_0+\theta_2 h)}{\Re e^{\omega i}g^n(z_0+\theta_3 h)+\Im e^{\omega i}g^n(z_0+\theta_4 h)},\quad 0<\theta_3 \text{ et } \theta_4<1.$$

Supposons f^nz, g^nz continues pour $z=z_0$. Il viendra, si R tend vers 0,

$$\lim\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)}=\frac{\Re e^{\omega i}f^nz_0+\Im e^{\omega i}f^nz_0}{\Re e^{\omega i}g^nz_0+\Im e^{\omega i}g^nz_0}=\frac{f^nz_0}{g^nz_0}.$$

12. Développement en séries. Faisons $z_0=0$, $\mathrm{Z}=z$, dans la formule qui donne $f\mathrm{Z}$ (n° 10), de sorte que

$$fz=f0+\frac{z}{1}f'0+\frac{z^2}{1.2}f''0+\cdots+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}0+\rho,$$

$$\rho_l=\Re\frac{z^n}{1.2\ldots n}f^n(\theta_1 z)+\Im\frac{z^n}{1.2\ldots n}f^n(\theta_2 z),$$

$$\rho_c=\Re\frac{z^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta_1)^{n-1}f^n(\theta_1 z)+\Im\frac{z^n}{1.2\ldots(n-1)}(1-\theta_2)^{n-1}f^n(\theta_2 z).$$

Supposons que le module de ρ soit inférieur à une fonction M_n de n pour toute valeur de θ, de 0 à 1, et que, pour $n=\infty$, $\lim \mathrm{M}_n=0$. Alors, on aura aussi $\lim\rho=0$, pour $n=\infty$ et l'on pourra écrire

$$fz=f0+\frac{z}{1}f'0+\frac{z^2}{1.2}f''0+\text{etc.},$$

le second membre étant une série indéfinie (*).

(*) Si M_n est toujours inférieur à M'_n quand ω varie de 0 à 2π, et si $\lim \mathrm{M}'_n=0$, pour $n=\infty$, on peut établir le théorème de Cauchy, rappelé n° 3 (note 1. 1°), en multipliant la première relation du n° 12 par $e^{-k\omega i}d\omega$, k étant entier, et intégrant entre les limites 0 et 2π.

V

Développements en série de e^z, Chz, Shz, $\cos z$, $\sin z$.

13. EXPONENTIELLE. Si $fz = e^z$, on trouve

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} + \rho_i,$$

$$\rho_i = \Re\left[\frac{z^n}{1.2 \ldots n} e^{\theta_1 z}\right] + \Im\left[\frac{z^n}{1.2 \ldots n} e^{\theta_2 z}\right].$$

Quelle que soit la valeur que l'on attribue à θ_1, θ_2, les modules

$$\frac{r^n}{1.2 \ldots n} e^{\theta_1 r \cos\omega}, \quad \frac{r^n}{1.2 \ldots n} e^{\theta_2 r \cos\omega}$$

de la partie réelle et de la partie imaginaire de ρ_i, obtenus en faisant $z = re^{\omega i}$, sont inférieurs à

$$\frac{r^n}{1.2 \ldots n} e^r,$$

quantité qui a pour limite 0, quand $n = \infty$. On peut donc écrire, quel que soit z,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ou, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire,

$$e^{r\cos\omega}\cos(r\sin\omega) = 1 + \frac{r\cos\omega}{1} + \frac{r^2\cos 2\omega}{1.2} + \frac{r^3\cos 3\omega}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$e^{r\cos\omega}\sin(r\sin\omega) = 1 + \frac{r\sin\omega}{1} + \frac{r^2\sin 2\omega}{1.2} + \frac{r^3\sin 3\omega}{1.2.3} + \text{etc},$$

formules que l'on peut aussi obtenir par multiplication de séries connues.

14. Fonctions hyperboliques et circulaires. Le développement

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

subsiste quel que soit z. On a donc aussi

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$e^{zi} = 1 + \frac{zi}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3 i}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$e^{-zi} = 1 - \frac{zi}{1} - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3 i}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Par conséquent,

$$\text{Ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

$$\text{Sh}z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}) = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

On peut séparer, si l'on veut, la partie réelle et la partie imaginaire dans ces formules. On trouve ainsi des séries représentant

$$\text{Ch}(r\cos\omega)\cos(r\sin\omega), \quad \text{Sh}(r\cos\omega)\sin(r\sin\omega),$$
$$\cos(r\cos\omega)\,\text{Ch}(r\sin\omega), \quad \sin(r\cos\omega)\,\text{Sh}(r\sin\omega),$$
$$\text{Sh}(r\cos\omega)\cos(r\sin\omega), \quad \sin(r\cos\omega)\,\text{Ch}(r\sin\omega),$$
$$\text{Sh}(r\sin\omega)\cos(r\cos\omega), \quad \sin(r\sin\omega)\,\text{Ch}(r\cos\omega),$$

que nous croyons inutile de transcrire.

VI

Développement de l((1 + z)).

15. Forme générale du développement. Supposons que z ne soit pas une quantité négative égale à -1 ou plus petite (*) et représentons par $l((1))$, la valeur de $l((1+z))$, pour $z=0$. En appliquant la formule du n° 12 à cette fonction, on trouve

$$l((1+z)) = l((1)) + \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{z^{n-1}}{n-1} + \rho,$$

$$\rho_i = \Re\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z}{1+\theta_1 z}\right)^n + \Im\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z}{1+\theta_2 z}\right)^n,$$

$$\rho_c = \Re\,(-1)^{n-1}z^n\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{(1+\theta_1 z)^n} + \Im\,(-1)^{n-1}z^n\frac{(1-\theta_2)^{n-1}}{(1+\theta_2 z)^n}.$$

Pour prouver que $\lim \rho = 0$, quand $n=\infty$, il suffit évidemment de montrer que l'une ou l'autre des deux expressions

$$A = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{1+\theta z}\right)^n, \quad B = z^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta z)^n},$$

a pour limite zéro, quand n croît indéfiniment, de quelque manière que θ varie entre zéro et l'unité.

16. Premier cas : $z = re^{\omega i}$, cos ω est nul ou positif, r égal a l'unité ou inférieur a l'unité (*). Posons

$$1+\theta z = \mathrm{R}e^{\Omega i},$$

c'est-à-dire

$$1+\theta r\cos\omega = \mathrm{R}\cos\Omega, \quad \theta r\sin\omega = \mathrm{R}\sin\Omega, \quad \mathrm{R} = \sqrt{1+2\theta r\cos\omega+\theta^2 r^2}.$$

(*) Le cas où le module de z est supérieur à 1 est exclu, parce que le module de $\frac{z^k}{k}$ croît indéfiniment avec k dans cette hypothèse.

Dans le cas actuel, puisque cos ω est nul ou positif, R est supérieur ou égal à 1 et, par suite, à r. Donc le module de A, c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\text{R}}\right)^n,$$

est inférieur à $\frac{1}{n}$ et a pour limite zéro, quand n croît indéfiniment. On peut donc écrire

$$\text{l}((1+z)) = \text{l}((1)) + \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}$$

17. Deuxième cas : $z = re^{\omega i}$, cos ω est négatif, r inférieur a l'unité. En posant encore

$$1 + \theta z = \text{R}e^{\Omega i},$$

on trouve

$$\text{mod B} = r^n\left(\frac{1-\theta}{\text{R}}\right)^{n-1}\frac{1}{\text{R}}.$$

Le module R n'est jamais nul. Ensuite, quelque valeur que prenne θ entre 0 et 1, on a toujours

$$1 - \theta < \text{R};$$

car cette égalité revient successivement à celles-ci :

$$(1-\theta)^2 < 1 + 2\theta r \cos\omega + \theta^2 r^2,$$
$$\theta(1+r)(1-r) < 2(1 + r\cos\omega),$$

dont la dernière est évidente. Pour $n = \infty$, lim $r^n = 0$, $\frac{1-\theta}{\text{R}}$ est au plus égal à l'unité. Donc lim mod B $= 0$, et l'on a encore

$$\text{l}((1+z)) = \text{l}((1)) + \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}$$

18. Troisième cas : $z = e^{\omega i}$, cos ω négatif, mais différent de -1. Dans ce cas, nous chercherons d'abord le développement

de $(1+z)\,l\,((1+z))$, dont les dérivées successives, jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, sont

$$1+l((1+z)), \frac{1}{1+z}, -\frac{1}{(1+z)^2}, \frac{1.2}{(1+z)^3}, \ldots, (-1)^{n-2}\frac{1.2.3\ldots(n-2)}{(1+z)^{n-1}}.$$

On trouve immédiatement

$$(1+z)\,l\,((1+z)) = (1+z)\,l\,((1)) + G + \rho_e'$$

$$G = z + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4} - \cdots + (-1)^{n-3}\frac{z^{n-1}}{(n-2)(n-1)},$$

$$\rho_e' = \mathfrak{R}(-1)^{n-2}\frac{z^n}{n-1}\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 z}\right)^{n-1} + \mathfrak{J}(-1)^{n-2}\frac{z^n}{n-1}\left(\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 z}\right)^{n-1}.$$

Pour prouver que ρ_e' a pour limite zéro pour $n=\infty$, il suffit de prouver que

$$C = \frac{z^n}{n-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1}$$

a pour limite 0, quand n croît indéfiniment, de quelque manière que θ varie entre 0 et 1. Or

$$\text{mod } C = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1-\theta}{\sqrt{1+2\theta\cos\omega+\theta^2}}\right)^{n-1}.$$

On a toujours

$$1-\theta < \sqrt{1+2\theta\cos\omega+\theta^2},$$

car, cette égalité revient à celles-ci :

$$1-2\theta+\theta^2 < 1+2\theta\cos\omega+\theta^2, \qquad -1 < \cos\omega,$$

dont la dernière est évidente.

Par conséquent, pour $n=\infty$, $\lim \text{mod } C = 0$, $\lim \rho_e' = 0$.

L'expression G peut s'écrire :

$$G = \frac{z}{1} + \left(\frac{z^2}{1} - \frac{z^2}{2}\right) - \left(\frac{z^3}{2} - \frac{z^3}{3}\right) + \cdots + (-1)^{n-3}\left(\frac{z^{n-1}}{n-2} - \frac{z^{n-1}}{n-1}\right).$$

Par suite, le développement de $(1+z)\,\mathrm{l}\,((1+z))$ est

$$(1+z)\left\{\mathrm{l}((1))+\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{z^{n-2}}{n-2}+(-1)^{n-2}\frac{z^{n-1}}{n-1}\right\}$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n-1}+\rho'_c.$$

Donc, en divisant par $(1+z)$,

$$\mathrm{l}((1+z))=\mathrm{l}((1))+\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{z^{n-1}}{n-1}+\rho''.$$

$$\rho''=\frac{1}{1+z}\left\{(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n-1}+\rho'_c\right\}.$$

Pour n croissant indéfiniment, les deux parties de ρ'' tendent vers zéro. Donc, on a encore

$$\mathrm{l}((1+z))=\mathrm{l}((1))+\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{etc.}$$

Remarque. Cette démonstration, comme nous l'a fait remarquer M. Gilbert, peut s'appliquer au cas où r est inférieur à l'unité.

19. Séries réelles contenues dans les précédentes. Posons, comme plus haut, $z=re^{\omega i}$, et supposons, pour fixer les idées, ω compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Soit ensuite

$$1+z=r'e^{\omega' i},$$

ω' étant aussi compris entre $-\pi$ et $+\pi$. On aura, comme on sait,

$$\mathrm{l}((1+z))=\text{log. arithmétique de } r'+\omega' i+2k\pi i,$$

k étant un entier quelconque. On a, d'ailleurs,

$$1+re^{\omega i}=r'e^{\omega' i},$$

c'est-à-dire

$$1+r\cos\omega=r'\cos\omega',\quad r\sin\omega=r'\sin\omega',$$

$$r'=\sqrt{1+r^2+2r\cos\omega}.$$

Il résulte immédiatement de ces formules, ou des constructions

géométriques correspondantes, que ω et ω' sont tous deux positifs ou tous deux négatifs; de plus, ω' est, en valeur absolue, plus petit que ω. Si z tend vers zéro, c'est-à-dire si r tend vers zéro, ω restant fixe, r' tend vers l'unité, ω' vers zéro, et, par suite, on a

$$\mathrm{l}((1)) = 2k\pi i.$$

Dans le cas particulier où $r = 1$, on trouve

$$r' = \sqrt{2 + 2\cos\omega} = 2\cos\frac{1}{2}\omega,$$

sans ambiguïté de signe, puisque $\cos\frac{1}{2}\omega$ n'est jamais négatif. On a ensuite

$$r'\cos\omega' = 1 + \cos\omega = 2\cos^2\frac{1}{2}\omega, \quad r'\sin\omega' = \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la valeur de r',

$$\cos\omega' = \cos\frac{1}{2}\omega, \quad \sin\omega' = \sin\frac{1}{2}\omega,$$

et, par conséquent,

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega.$$

Nous pouvons maintenant séparer la partie réelle et la partie imaginaire dans la série

$$\mathrm{l}((1 + z)) = \mathrm{l}((1)) + \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.},$$

ou

$$\mathrm{l}r' + \omega' i + 2k\pi i = 2k\pi i + \frac{re^{\omega i}}{1} - \frac{r^2e^{2\omega i}}{2} + \frac{r^3e^{3\omega i}}{3} - \frac{r^4e^{4\omega i}}{4} + \text{etc.}$$

On trouve ainsi

$$\mathrm{l}\sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\omega} = \frac{r\cos\omega}{1} - \frac{r^2\cos 2\omega}{2} + \frac{r^3\cos 3\omega}{3} - \frac{r^4\cos 4\omega}{4} + \text{etc.},$$

$$\omega' = \frac{r\sin\omega}{1} - \frac{r^2\sin 2\omega}{2} + \frac{r^3\sin 3\omega}{3} - \frac{r^4\sin 4\omega}{4} + \text{etc.}$$

L'angle ω' est compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et est donné par les relations

$$\omega' = \text{arc sin}\,\frac{r \sin \omega}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \omega}} = \text{arc cos}\,\frac{1 + r \cos \omega}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \omega}}.$$

En particulier, si $r=1$, on a $\omega'=\frac{1}{2}\omega$, $\sqrt{1+r^2+2r\cos\omega}=2\cos\frac{1}{2}\omega$. Donc

$$\mathrm{l}\left(2 \cos \frac{1}{2}\,\omega\right) = \frac{\cos \omega}{1} - \frac{\cos 2\omega}{2} + \frac{\cos 3\omega}{3} - \frac{\cos 4\omega}{4} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}\,\omega = \frac{\sin \omega}{1} - \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \frac{\sin 4\omega}{4} + \text{etc.},$$

formules dont la démonstration rigoureuse se déduit aussi des principes fondamentaux relatifs aux séries de Fourier.

VII

Développement de $(1 + z)^m$.

20. Préliminaires. Soit $m = a + bi$. Nous représentons, avec Cauchy, par $((1 + z))^m$ l'expression

$$e^{m\mathrm{l}((1+z))}.$$

Soient, comme au n° 19, ω et ω' des angles compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et tels que

$$z = re^{\omega i}, \quad 1 + z = r'e^{\omega' i},$$

et, par suite,

$$1 + r\cos\omega = r'\cos\omega', \quad r\sin\omega = r'\sin\omega', \quad \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\omega} = r'.$$

On aura

$$((1+z))^m = e^{(a+bi)(\mathrm{l}r' + \omega' i + 2k\pi i)} = e^{a\mathrm{l}r' - b(\omega' + 2k\pi) + i[b\mathrm{l}r' + a(\omega' + 2k\pi)]}$$
$$= r'^a e^{-b(\omega'+2k\pi)}\left\{\cos[b\mathrm{l}r' + a(\omega' + 2k\pi)] + i\sin[b\mathrm{l}r' + a(\omega' + 2k\pi)]\right\}.$$

Représentons par $(1+z)^m$ celle des valeurs de $((1+z))^m$ qui correspond à $k=0$. On aura

$$(1+z)^m = r'^a e^{-b\omega'}\left[\cos(b\,l r' + a\omega') + i\sin(b\,l r' + a\omega')\right].$$

Supposons que ω reste fixe et que r tende vers zéro. Alors r' tend vers l'unité et ω' vers zéro. Donc, à la limite

$$((1))^m = e^{-2bk\pi}(\cos 2ak\pi + i\sin 2ak\pi), \quad 1^m = 1.$$

Il résulte de là, d'après les propriétés des exponentielles imaginaires, que

$$((1+z))^m = ((1))^m (1+z)^m.$$

Par suite, il suffit de chercher le développement de $(1+z)^m$, celui de $((1+z))^m$ s'en déduisant immédiatement.

On trouve sans peine, pour les dérivées successives de $(1+z)^m$,

$$m(1+z)^{m-1}, \quad m(m-1)(1+z)^{m-2},$$
$$m(m-1)(m-2)(1+z)^{m-3}, \ldots, m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+z)^{m-n}.$$

Pour n suffisamment grand, ces dérivées cesseront d'être finies et déterminées, si $z=-1$. En effet, quand $z=-1$, $r'=1+z=0$, et les expressions

$$(1+z)^m, \quad (1+z)^{m-1}, \quad (1+z)^{m-2}, \quad (1+z)^{m-3}, \ldots, \quad (1+z)^{m-n},$$

contiennent les facteurs

$$r'^a, \quad r'^{a-1}, \quad r'^{a-2}, \quad r'^{a-3}, \ldots, \quad r'^{a-n};$$

or, si n est supérieur à a, r'^{a-n} est infini.

Par conséquent, on ne pourra pas appliquer le théorème de Taylor à la fonction $(1+z)^m$, dans le cas où $z=-1$; mais alors on peut obtenir ce développement d'une manière élémentaire.

21. Forme générale du développement. On trouve, comme dans le cas où m est commensurable et z réel, la forme générale du développement de $(1+z)^m$, savoir :

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1} + \rho,$$

et ρ a l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\rho_r = \mathfrak{R}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n\frac{1}{(1+\theta_1 z)^{n-m}}$$

$$+ \mathfrak{I}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n\frac{1}{(1+\theta_2 z)^{n-m}},$$

$$\rho_c = \mathfrak{R}\, mz\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1}\frac{(1-\theta_1)^{n-1}}{(1+\theta_1 z)^{n-m}}$$

$$+ \mathfrak{I}\, mz\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1}\frac{(1-\theta_2)^{n-1}}{(1+\theta_2 z)^{n-m}}.$$

Ces formules supposent que la variable z ne passe pas par la valeur -1.

Pour que $\lim \rho = 0$, quand $n=\infty$, il suffit que $\lim A = 0$, ou $\lim B = 0$, de quelque manière que θ varie entre 0 et l'unité, A et B étant définis par les relations,

$$A = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n\frac{1}{(1+\theta z)^{n-m}},$$

$$B = mz\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1}\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta z)^{n-m}}.$$

Chaque fois que $\lim \rho = 0$, pour $n=\infty$, on a, en série indéfinie,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \text{etc.}$$

Par suite, la limite du terme général

$$u_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} z^n$$

de cette série, doit être nulle chaque fois que lim $\rho = 0$. Cherchons les conditions impliquées dans la relation lim $u_n = 0$.

22. Le module r doit être inférieur à l'unité, ou s'il est égal à l'unité, $a + 1$ doit être positif. Le carré U du module de u_n peut s'écrire

$$\frac{a^2 + b^2}{1} r^2 \times \frac{(a-1)^2 + b^2}{2^2} r^2 \times \dots \times \frac{(a+1-n)^2 + b^2}{n^2} r^2,$$

ou, en abrégé,

$$U = F_1 . F_2 . F_3 . . F_n,$$

si l'on pose

$$F_k = \frac{(a+1-k)^2 + b^2}{k^2} r^2.$$

Premier cas : $r^2 < 1$. Pour k croissant indéfiniment, lim $F_k = r^2$. Donc, si n est suffisamment grand, on peut assigner une quantité t inférieure à l'unité et plus grande que $F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_n$; par suite, on aura

$$0 < U < F_1F_2 \dots F_l t^{n-l}$$

et pour $n = \infty$, lim $U = 0$.

Deuxième cas : $r^2 > 1$. On prouve de même que

$$U > F_1F_2 \dots F_l t^{n-l},$$

t étant une quantité supérieure à l'unité. Donc lim $U = \infty$ et la série $1 + mz +$ etc., ne peut être convergente.

TROISIÈME CAS : $r^2 = 1$. Alors, on a

$$F_k = \frac{(a+1-k)^2 + b^2}{k^2} = 1 - \frac{2(a+1)}{k} + \frac{(a+1)^2 + b^2}{k^2}.$$

Si $a+1$ est nul ou négatif, F_k est plus grand que l'unité ou égal à l'unité et U aussi. Donc, pour que $\lim U = 0$, il faut que $a+1$ soit positif.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. L'expression de F_k peut se mettre sous la forme

$$F_k = 1 - c_k, \quad c_k = \frac{2(a+1)}{k} - \frac{(a+1)^2 + b^2}{k^2} = \frac{a+1}{k}\left\{2 - \frac{a+1+\dfrac{b^2}{a+1}}{k}\right\}.$$

Pour k suffisamment grand, c_k est positif et inférieur à l'unité. Supposons que cela arrive pour toutes les valeurs de k à partir de $l+1$. On a

$$1 - c_k = \frac{1 - c_k^2}{1 + c_k} < \frac{1}{1 + c_k}.$$

Par suite

$$(1 - c_{l+1})(1 - c_{l+2}) \ldots (1 - c_n) < \frac{1}{(1 + c_{l+1})(1 + c_{l+2}) \ldots (1 + c_n)}$$

et, à fortiori, puisque $(1 + c_{l+1})(1 + c_{l+2}) \ldots (1 + c_n)$ est supérieur à $c_{l+1} + c_{l+2} + \cdots + c_n$,

$$(1 - c_{l+1})(1 - c_{l+2}) \ldots (1 - c_n) < \frac{1}{c_{l+1} + c_{l+2} + \cdots + c_n}.$$

Or

$$c_{l+1} + c_{l+2} + \cdots + c_n = 2(a+1)\left[\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

$$- \left[(a+1)^2 + b^2\right]\left[\frac{1}{(l+1)^2} + \frac{1}{(l+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right]$$

et, pour $n = \infty$, cette somme est infinie. Par suite

$$\lim U = (F_1F_2 \dots F_k) \lim (1 - c_{k+1})(1 - c_{k+2}) \dots (1 - c_n) = 0.$$

En résumé, pour que u_n ait pour limite zéro, il faut et il suffit que le module de z soit inférieur à l'unité, ou s'il est égal à l'unité, que la partie réelle de $m + 1$, savoir $a + 1$, soit positive.

23. Limite de ρ. Premier cas : $z = re^{\omega i}$, cos ω est nul ou positif, r inférieur a l'unité. Soit

$$1 + \theta z = Re^{\Omega i},$$

c'est-à-dire

$$1 + \theta r \cos \omega = R \cos \Omega, \quad \theta r \sin \omega = R \sin \Omega, \quad R = \sqrt{1 + \theta^2 r^2 + 2\theta r \cos \omega}.$$

Le module de A est égal à

$$(\text{mod } u_n) \frac{1}{R^{n-m}}$$

et a pour limite zéro, quand $n = \infty$, puisque R est égal ou supérieur à 1 et que lim mod $u_n = 0$, d'après le n° 22.

24. Deuxième cas : $z = e^{\omega i}$, cos ω nul ou positif. Le module R est encore supérieur à 1. D'après le n° 22, il faut et il suffit que $a + 1$ soit positif pour que lim $u_n = 0$. Cette condition est suffisante pour que

$$\text{mod } A = (\text{mod } u_n) \frac{1}{R^{n-m}}$$

ait pour limite zéro.

25. Troisième cas : $z = re^{\omega i}$, cos ω est négatif, r inférieur a l'unité. Le module de B est égal à

$$\text{mod } mz \times \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots(n-1)} z^{n-1} \times \left(\frac{1-\theta}{R}\right)^{n-1} \times R^{m-1}.$$

D'après le n° 22, le second facteur a pour limite zéro ; on a vu au n° 17 que le troisième est inférieur à l'unité ; le quatrième ne peut être infini, parce que R n'est ni nul ni infini. Donc lim $B = 0$.

26. Quatrième cas : $z = e^{\omega i}$, cos ω négatif, mais différent de -1. 1° R est encore différent de zéro, mais, pour que le second facteur du module de B, savoir, dans l'hypothèse actuelle,

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)},$$

ait pour limite zéro, il faut que la partie réelle de $(m-1)+1$, c'est-à-dire a, soit positive, d'après le n° 22. Mais cette condition *suffisante* n'est pas nécessaire, comme nous allons le montrer.

2° D'après ce qui vient d'être démontré, on a

$$(1+z)^{m+1} = 1 + \frac{m+1}{1} z + \frac{(m+1)m}{1.2} z^2 + \cdots$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n} z^n + \rho',$$

et lim $\rho' = 0$, pour $n = \infty$, si $\mathcal{R}(m+1) = a+1$ est positif. Mais on sait que

$$\frac{m+1}{1} = \frac{m}{1} + 1, \quad \frac{(m+1)m}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m}{1},$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)}{1.2}, \ldots$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Par suite, le développement précédent peut s'écrire

$$(1+z)^{m+1}=\left[1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}z^{n-1}\right]$$

$$+z\left[1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}z^{n-1}\right]$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}z^n+\rho',$$

ou, en représentant la somme entre parenthèses du second membre par S_n,

$$(1+z)^{m+1}=(1+z)\,S_n+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}z^n+\rho'.$$

Divisons les deux membres par $1+z$, il viendra

$$(1+z)^m=S_n+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}\cdot\frac{z^n}{1+z}+\frac{\rho'}{1+z}.$$

Si n croît indéfiniment, $\lim\rho'=0$. Il en est de même du premier facteur du second terme du second membre, d'après le n° 22, puisque $a+1$ est >0. Donc enfin

$$(1+z)^m=\lim S_n=1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\text{etc}$$

27. Cinquième cas : $z=-1$. Ce cas exceptionnel se traite directement. On a

$$(1-1)^m=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}$$

si $\mathfrak{R}(m)$ est positif. En effet,

$$1-\frac{m}{1}=-\frac{m-1}{1},\quad 1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}=\frac{(m-1)(m-2)}{1.2},\dots$$

et de proche en proche

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \cdots + (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

$$= (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}.$$

D'après le n° 22, la dernière expression n'a une limite déterminée que si la partie réelle de m est positive, ce qui établit la formule du binôme dans le cas considéré; car, dans cette hypothèse, $(1-1)^m = 0$.

28. Résumé; formules spéciales. Le reste ρ a pour limite zéro, d'après la discussion des nos 23-26, chaque fois que le module de z est inférieur à l'unité, ou si, étant égal à l'unité, on a $\mathcal{R}(m+1) > 0$, sauf toutefois quand $z = -1$. Dans ce dernier cas, il faut de plus que $\mathcal{R}(m) = 0$.

On peut encore dire que l'on a

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \text{etc.}$$

si la série du second membre est convergente. Elle est convergente d'ailleurs, si pour $n = \infty$, u_n, terme général, a pour limite zéro, sauf si $z = -1$; alors, il faut que $\lim nu_n = 0$ comme il est aisé de le voir.

Il est facile de séparer la partie réelle et la partie imaginaire dans chacun des deux membres de l'égalité

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \text{etc.},$$

ou de l'égalité plus générale

$$((1+z))^m = ((1))^m \left\{ 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \text{etc.} \right\}.$$

Dans son Mémoire sur le Binôme, Abel a énuméré tous les cas particuliers remarquables, parmi lesquels il faut surtout citer:

1° Celui où $b=0$, $\operatorname{mod} z=1$, $\omega'=\frac{1}{2}\omega$, $r'=2\cos\frac{1}{2}\omega$, $a+1>0$. On trouve, dans tous les cas possibles, la valeur de $\sin^a x$, $\cos^a x$, en fonction des sinus et des cosinus des multiples de x;

2° Celui où $z=i\operatorname{tang} x$, x étant au plus égal à $\pm\frac{\pi}{4}$. On trouve alors $\cos ax$, $\sin ax$ exprimé en fonction des puissances de $\cos x$, $\sin x$.

VIII

Autre forme donnée aux résultats précédents.

29. Formes nouvelles du théorème fondamental. I. Si Fz est la fonction dont il est question au § III, on a

$$FZ-Fz_0=\int_{z_0}^{Z}F'z\,dz,$$

le second membre signifiant la limite de la somme de toutes les expressions $F'z\,\Delta z$, quand x, y prennent successivement les valeurs correspondant aux différents points d'une courbe AB dont l'équation est $y=\chi x$, de sorte que $dy=\chi' x dx$. Le point A correspond à $z_0=x_0+y_0 i$, le point B à $X+Yi$.

On a, en effet,

$$F'z\Delta z=(\varphi'_x+i\psi'_x)(\Delta x+i\Delta y)=(\varphi'_x\Delta x-\psi'_x\Delta y)+i(\varphi'_x\Delta y+\psi'_x\Delta x),$$

puis, à cause des relations du n° 5 et de $\Delta y=\chi' x\Delta x+\varepsilon\Delta x$, ε étant infiniment petit avec Δx,

$$\varphi'_x\Delta x-\psi'_x\Delta y=\varphi'_x\Delta x+\varphi'_y\Delta y=(\varphi'_x+\varphi'_y\chi' x)\Delta x+\varepsilon\varphi'_y\Delta x=\frac{d\varphi}{dx}\Delta x+\varepsilon\varphi'_y\Delta x,$$

$$\varphi'_x\Delta y+\psi'_x\Delta x=\psi'_y\Delta y+\psi'_x\Delta x=(\psi'_y\chi' x+\psi'_x)\Delta x+\varepsilon\psi'_y\Delta x=\frac{d\psi}{dx}\Delta x+\varepsilon\psi'_y\Delta x.$$

Par suite, les termes en ε pouvant, en général, être laissés de côté sous le signe $\int$,

$$\int_{z_0}^{Z} F'z dz = \int_{x_0}^{X} \left(\frac{d\varphi(x, \chi x)}{dx} + i \frac{d\psi(x, \chi x)}{dx} \right) dx$$

$$= \varphi(X, \chi X) + i\psi(X, \chi X) - \varphi(x_0, \chi x_0) - i\psi(x_0, \chi x_0)$$

$$= \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y) - \varphi(x_0, y_0) - i\psi(x_0, y_0) = FZ - Fz_0.$$

Remarque. Si $\chi' x$ devenait infini en un nombre fini de points entre A et B, on démontrerait le théorème pour les diverses parties de AB obtenues en supprimant des arcs infiniment petits contenant ces points exceptionnels; puis on passerait à la limite.

II. Le module de $\int_{z_0}^{z} F'z dz$ est tout au plus égal à la limite de la somme des modules des produits $F'z dz$. Or, le module de $dz = dx + idy$ est $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, s désignant l'arc de la courbe AB; le module de $F'z$ est une partie du module de $F'\zeta$, ζ étant la valeur de z, le long de AB, qui donne à mod $F'z$ la valeur la plus grande. On peut donc écrire

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{Z} F'z dz = \lambda \int_{z_0}^{Z} (\operatorname{mod} F'\zeta)\, ds = \lambda \operatorname{mod} F'\zeta \times s,$$

λ désignant une quantité au plus égale à l'unité, s l'arc AB. Une expression imaginaire ne différant de son module que par un facteur exponentiel purement imaginaire, on a

$$\int_{z_0}^{Z} F'z dz = \lambda e^{\alpha i} F'\zeta \times s,$$

et, par suite,

$$FZ - Fz_0 = \lambda e^{\alpha i} F'\zeta \,.\, s.$$

Si AB est une droite, s est la distance des points A, B, égale à $(Z - z_0)\, e^{-\omega i}$. Donc

$$FZ - Fz_0 = \lambda e^{\beta i} (Z - z_0) F'\zeta, \quad \beta = \alpha - \omega.$$

30. THÉORÈME DE TAYLOR. Appliquons la première des formules précédentes à

$$Fz = fZ - \left[fz + \frac{Z-z}{1}f'z + \frac{(Z-z)^2}{1.2}f''z + \cdots + \frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{n-1}z\right],$$

fz étant la fonction du n° 10. Nous retrouverons la formule de Taylor avec la forme suivante du reste :

$$\rho = \int_{z_0}^{Z} \frac{(Z-t)^{n-1} f^n t\, dt}{1.2.3 \ldots (n-1)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la fin du numéro précédent, si l'on intègre suivant une droite AB, allant de z_0 à Z, seul cas que nous ayons intérêt à considérer, on trouve que

$$\rho = \lambda e^{\alpha i} \frac{(Z-z_0)^n}{1.2.3 \ldots n} \frac{n}{p} (1-\theta)^{n-p} f^n \zeta, \quad \zeta = z_0 + \theta(Z - z_0), \quad 0 < \theta < 1$$

forme du reste due à M. Darboux. Si en particulier $z_0 = 0$, $Z = z$, on obtient la formule de Maclaurin,

$$fz = f0 + \frac{z}{1} f'0 + \frac{z^2}{1.2} f''0 + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} f^{n-1}0 + \rho,$$

$$\rho = \int_0^Z \frac{(z-t)^{n-1} f^n t\, dt}{1.2.3 \ldots (n-1)} = \lambda e^{\alpha i} \frac{z^n}{1.2 \ldots n} \frac{n}{p} (1-\theta)^{n-p} f^n(\theta z).$$

31. APPLICATIONS. La nouvelle forme du reste, sans intégrale définie, où l'on suppose $p = n$ ou $p = 1$, permet évidemment de faire les discussions des § V, VI, VII, absolument comme plus haut. La forme du reste en intégrale définie semble utile seulement pour prouver que $\lim \rho = 0$, dans le cas du n° 18. On a dans ce cas, où $r = e^{\omega i}$, $fz = l(1+z)$, $f^n z = (-1)^n (1+z)^{-n}$,

$$\rho = (-1)^{n-1} \int_0^{\omega i} \frac{(e^{\omega i} - t)^{n-1} dt}{(1+t)^n} = (-1)^{n-1} e^{n\omega i} \int_0^1 \frac{(1-r)^{n-1} dr}{(1+re^{\omega i})^n},$$

la seconde forme étant obtenue en posant $t = re^{\omega i}$. Soit

$$1 + re^{\omega i} = r'e^{\omega' i}, \quad r' = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\omega}.$$

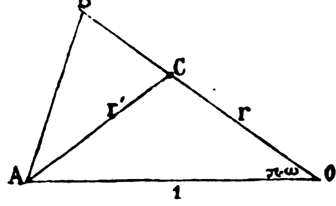
L'expression de ρ deviendra

$$\rho = (-1)^{n-1} e^{n\omega i} \int_0^1 \frac{(1-r)^{n-1} e^{-n\omega' i} dr}{r'^n},$$

dont le module est tout au plus égal à

$$G = \int_0^1 \frac{(1-r)^{n-1} dr}{r'^n} = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1-r}{r'}\right)^{n-1} \frac{dr}{r'} + \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1-r}{r'}\right)^{n-1} \frac{dr}{r'}.$$

Construisons un triangle isocèle OAB, où $OA = OB = 1$, et l'angle $AOB = \pi - \omega$, et prenons sur OB la longueur variable $OC = r$. On aura



$$BC = 1 - r,$$

$$AC = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\omega} = r',$$

puis

$$\frac{1-r}{r'} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin BAC}{\sin ABC}.$$

La plus petite valeur de AC correspond à la position de C où AC est perpendiculaire à BO et, par suite, est égal à $\sin\omega$; le rapport de BC à AC décroît de 1 à 0 quand r varie de 0 à 1. Donc

$$\int_0^\varepsilon \left(\frac{1-r}{r'}\right)^{n-1} \frac{dr}{r'} < \int_0^\varepsilon \frac{dr}{\sin\omega} \text{ ou } \frac{\varepsilon}{\sin\omega}$$

$$\int_\varepsilon^1 \left(\frac{1-r}{r'}\right)^{n-1} \frac{dr}{r'} < \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\omega}}\right)^{n-1} \frac{dr}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\omega}},$$

ou

$$\int_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{1-r}{r'}\right)^{n-1}\frac{dr}{r'}<\left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\omega}}\right)^n.$$

On a donc

$$G<\frac{\varepsilon}{\sin\omega}+\left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\omega}}\right)^n.$$

Pour ε quelconque compris entre 0 et 1, le second terme du second membre est aussi petit que l'on veut, quand n est suffisamment grand; il en est de même du premier pour ε suffisamment petit. Donc G devient inférieur à une quantité donnée quelconque, pour n suffisamment grand et, par suite, $\lim G = 0$ et $\lim \rho = 0$.

IX

Démonstration directe du théorème de Darboux.

22. Lemmes préliminaires. I. Si $z = x + yi$ est une valeur intermédiaire entre $z_1 = x_1 + y_1 i$ et $z_2 = x_2 + y_2 i$, c'est-à-dire si x est compris entre x_1 et x_2, y entre y_1 et y_2, la dérivée $F'z$ de Fz est égale à la limite de

$$\frac{Fz_2 - Fz_1}{z_2 - z_1},$$

quand z_2 et z_1 tendent simultanément vers z. En effet, de

$$\lim\frac{Fz_2 - Fz}{z_2 - z} = F'z,$$

on déduit

$$Fz_2 - Fz = (z_2 - z)\,F'z + \varepsilon_2(z_2 - z),$$

ε_2 ayant pour limite zéro, en même temps que $z_2 - z$. De même,

$$Fz_1 - Fz = (z_1 - z)\,F'z + \varepsilon_1(z_1 - z$$

ε_1 ayant pour limite zéro, en même temps que $z_1 - z$. De ces égalités on déduit

$$Fz_2 - Fz_1 = (z_2 - z_1)\,F'z + \varepsilon_2(z_2 - z) + \varepsilon_1(z - z_1),$$

$$\frac{Fz_2 - Fz_1}{z_2 - z_1} = F'z + \varepsilon_2\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} + \varepsilon_1\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1)$$

On a, ensuite, d'après les hypothèses,

$$\operatorname{mod}\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} = \operatorname{mod}\frac{(x_2 - x) + i(y_2 - y)}{(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)} = \sqrt{\frac{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}},$$

quantité plus petite que l'unité.

De même,

$$\operatorname{mod}\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} < 1.$$

Donc, à la limite, l'égalité (1) devient

$$\lim\frac{Fz_2 - Fz_1}{z_2 - z_1} = F'z.$$

Corollaire. On a, évidemment,

$$\lim\operatorname{mod}\frac{Fz_2 - Fz_1}{z_2 - z_1} = \operatorname{mod} F'z.$$

II. Soient $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, Z$, $(n + 1)$ valeurs successives de la variable z, telles que

$$z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = \cdots = Z - z_{n-1} = h + ki;$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, U les valeurs correspondantes de la fonction

$u = Fz$, $r_1 + s_1 i$, $r_2 + s_2 i$, ..., $r_n + s_n i$ leurs différences successives, de sorte que

$$u_1 - u_0 = r_1 + s_1 i, \quad u_2 - u_1 = r_2 + s_2 i, \ldots, \quad U - u_{n-1} = r_n + s_n i.$$

Le module de l'un, au moins, des rapports

$$\frac{r + si}{h + ki}$$

est égal ou supérieur à celui de

$$\frac{U - u_0}{Z - z_0}.$$

En effet,

$$\frac{U - u_0}{Z - z_0} = \frac{1}{n}\left[\frac{r_1 + s_1 i}{h + ki} + \frac{r_2 + s_2 i}{h + ki} + \cdots + \frac{r_n + s_n i}{h + ki}\right].$$

Si tous les rapports $[(r + si) : (h + ki)]$ sont égaux, on a pour l'un quelconque d'entre eux

$$\frac{U - u_0}{Z - z_0} = \frac{r + si}{h + ki}, \quad \operatorname{mod} \frac{U - u_0}{Z - z_0} = \operatorname{mod} \frac{r + si}{h + hi}.$$

Si ces rapports sont inégaux, soit $[(r_M + s_M i) : (h + ki)]$, celui dont le module est le plus grand. On aura, d'après un théorème connu,

$$\operatorname{mod} \frac{U - u_0}{Z - z_0} < \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{r_1^2 + s_1^2}{h^2 + k^2}} + \sqrt{\frac{r_2^2 + s_2^2}{h^2 + k^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{r_n^2 + s_n^2}{h^2 + k^2}}\right],$$

et, *à fortiori*,

$$\operatorname{mod} \frac{U - u_0}{Z - z_0} < \sqrt{\frac{r_M^2 + s_M^2}{h^2 + k^2}}.$$

Donc, dans les deux cas, le lemme est démontré.

III. Subdivisons $Z - z_0$ en n parties égales, comme dans le lemme précédent, mais désignons, cette fois, par $Z_1 - z_1 = h_1 + k_1 i$ celle des parties où le rapport $[(r + si) : (h + ki)]$ a le module

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + s_1^2}{h_1^2 + k_1^2}}$$

le plus grand. Subdivisons $Z_1 - z_1$ aussi en n parties égales et soit $Z_2 - z_2 = h_2 + k_2 i$ celle des parties où le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable a encore le module

$$\sqrt{\frac{r_2^2 + s_2^2}{h_2^2 + k_2^2}}$$

le plus grand; et, ainsi de suite. La suite indéfinie des valeurs correspondantes de x, savoir : x_1, x_2, x_3, etc., est ou croissante, ou décroissante. Elle a, par conséquent, une limite ξ; de même, la suite des valeurs y_1, y_2, y_3, etc., de y a une limite η. La série croissante des modules

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + s_1^2}{h_1^2 + k_1^2}}, \quad \sqrt{\frac{r_2^2 + s_2^2}{h_2^2 + k_2^2}}, \quad \sqrt{\frac{r_3^2 + s_3^2}{h_3^2 + k_3^2}}, \text{ etc.}$$

tend aussi vers une limite. Cette limite, d'après le corollaire du lemme I, est le module de $F'(\xi + \eta i)$.

38. THÉORÈME DE DARBOUX. I. *Si $\xi + \eta i$ est une valeur intermédiaire entre z_0 et Z, correspondant à un point convenablement choisi sur la droite qui joint le point* (x_0, y_0) *au point* (X, Y), *on a*

$$\frac{FZ - Fz_0}{Z - z_0} = \lambda e^{\alpha i} F'(\xi + \eta i),$$

λ étant un facteur positif, au plus égal à l'unité. En effet, d'après les lemmes II et III,

$$\text{mod}\, \frac{FZ - Fz_0}{Z - z_0} = \lambda \text{ mod } F'(\xi + \eta i),$$

$\xi + \eta i$ étant la limite dont il est parlé dans le lemme III. Toute expression imaginaire est égale à son module multiplié par une exponentielle purement imaginaire. Donc

$$\frac{FZ - Fz_0}{Z - z_0} = \lambda e^{\alpha i} F'(\xi + \eta i).$$

II. *De même, en général,*

$$\frac{FZ - Fz_0}{fZ - fz_0} = \lambda e^{\alpha i} \frac{F'(\xi + \eta i)}{f'(\xi + \eta i)}. \tag{2}$$

Posons, en effet,

$$t = fz, \quad t_0 = fz_0, \quad T = fZ, \quad Fz = \chi t, \quad Fz_0 = \chi t_0, \quad FZ = \chi T,$$

de sorte que $F'z = \chi' t . f'z$. On aura

$$\frac{\chi T - \chi t_0}{T - t_0} = \lambda e^{\alpha i} \chi' \tau,$$

τ étant une certaine valeur intermédiaire entre t_0 et T. S'il y correspond une valeur $\zeta = \xi + \eta i$ de z telle que $\tau = f'\zeta$, la dernière égalité équivaut à la relation (1) à démontrer.

24. Théorème de Taylor. Cette circonstance se présente si $fz = (Z - z)^p$. Dans ce cas, on aura donc, puisque $fZ = 0$,

$$\frac{FZ - Fz_0}{(Z - z_0)^p} = \lambda e^{\alpha i} \frac{F'\zeta}{p (Z - \zeta)^{p-1}}.$$

Appliquons cette dernière formule à la fonction Fz définie au n° 30, nous obtiendrons le théorème de Taylor, avec la forme du reste

$$\rho = \lambda e^{\alpha i} \frac{(Z - z_0)^n}{1.2.3 \ldots n} \frac{n}{p} (1 - \theta)^{n-p} f^n \zeta,$$

due à M. Darboux.

X

Historique.

35. Recherches de Cauchy, Darboux et Falk. I. Cauchy, dans la treizième de ses *Leçons de calcul différentiel* (1829), a le premier démontré, d'une manière élémentaire, le théorème de Taylor pour les fonctions d'une variable imaginaire.

Soit $z = x + yi = r(\cos\omega + i\sin\omega)$ et

$$Fz = F(re^{\omega i}) = \varphi r + i\psi r.$$

On en déduit, en dérivant n fois par rapport à r,

$$e^{n\omega i}F^n(re^{\omega i}) = \varphi^n r + i\psi^n r.$$

Soient φr, ψr et leurs $(n-1)$ premières dérivées nulles pour $r = 0$. On aura, d'après des formules connues,

$$\varphi r = \frac{r^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(\theta_1 r),\qquad \psi r = \frac{r^n}{1.2\ldots n}\psi^n(\theta_1 r).$$

Par suite

$$Fz = \frac{z^n}{1.2\ldots n}e^{-n\omega i}\left[\varphi^n(\theta_1 r) + i\psi^n(\theta_2 r)\right].$$

En appliquant cette formule à la fonction

$$fz - \left[f0 + \frac{z}{1}f'0 + \frac{z^2}{1.2}f''0 + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}0\right],$$

on trouve le théorème de Maclaurin.

Cauchy déduit de ce qui précède la vraie valeur des expressions qui prennent la forme $(0:0)$, mais il n'en tire pas le développement de $l(1+z)$, $(1+z)^m$, comme il aurait pu le faire, en modifiant quelque peu la forme du reste, dans la formule de Maclaurin.

II. M. Falk a publié, en 1877, à l'occasion du quatrième centenaire de l'Université d'Upsal, un mémoire intitulé: *Sur les fonctions imaginaires, à l'égard spécial du calcul des résidus* (Upsal, Berling, 1877; 32 pages in-4°). Il y démontre le théorème de Taylor en ajoutant le développement connu de $\varphi(x_0+\Delta x_0, y+\Delta y_0)-\varphi(x_0, y_0)$ à celui de $i\psi(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0) - i\psi(x_0, y_0)$.

Notre procédé de démonstration ne diffère pas au fond de celui de Cauchy et de M. Falk, puisque le théorème fondamental du § III s'obtient en ajoutant des développements analogues réduits à leur premier terme. M. Falk applique les résultats obtenus à la recherche de la vraie valeur des expressions indéterminées et à la théorie des résidus, mais il ne traite pas la question du développement des fonctions spéciales, e^z, $\mathrm{l}(1+z)$, $(1+z)^m$.

III. M. Darboux a publié un travail intitulé: *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable,* dans la livraison de septembre 1876, du *Journal de Liouville, continué par M. Resal* (t. II, pp. 291-312) dont le § I contient, sous une forme cinématique, la démonstration des formules des n°s 29 et 30, ou même de formules plus générales, mais faciles à en déduire. Il fait observer que ces formules peuvent donner les développements de e^z, $\mathrm{l}(1+z)$, $(1+z)^m$, sauf que, dans ce dernier cas, on doit recourir à une remarque d'Abel, si le module de z est l'unité et si $\mathfrak{R}(m+1)$ est positif. La remarque d'Abel à laquelle M. Darboux fait allusion est sans doute l'artifice de calcul que nous avons emprunté à l'illustre géomètre norwégien pour établir le 2° du n° 26. C'est en imitant cet artifice au n° 18, que nous avons pu démontrer le développement de $\mathrm{l}(1+z)$, quand $z=e^{\omega i}$, $\cos\omega$ étant négatif, mais différent de -1.

IV. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire de Cauchy, on prouve que le reste dans la série de Taylor est

$$\rho=\frac{1}{2\pi i}\int^{*}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n\frac{ft\,dt}{t-z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour sur lequel et à l'intérieur duquel fz est une fonction synectique et z_0 et z étant dans le contour. On peut prouver rigoureusement (*) que

$$\frac{d\rho}{dz_0} = -\frac{n}{2\pi i}\int \frac{(z-z_0)^{n-1} ft\, dt}{(t-z_0)^{n+1}} = -\frac{(z-z_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n z_0.$$

Par suite,

$$\rho = \int_{z_0}^{z} \frac{(z-z_0)^{n-1} f^n z_0 dz_0}{1.2\ldots(n-1)},$$

formule équivalente à celle du n° 30. Elle se trouve, pour le cas d'une variable réelle, dans l'ouvrage intitulé : *Cours de M. Hermite professé pendant le 2e semestre 1881-1882, rédigé par M. Andoyer* (Paris, A. Hermann, 1882), pp. 59-60. Pour que l'on puisse, par cette voie, établir le développement de $(1+z)$, $(1+z)^m$, même dans le cas où le module est égal à l'unité, il faut prendre pour contour d'intégration, dans la première valeur de ρ, une courbe qui dépasse aux environs de z, le cercle de convergence du développement de fz.

(*) Voir, à ce sujet, une petite note publiée par nous, dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 2e série, t. VIII, pp. 183-185 (août 1884). Citons encore, sur le théorème de Rolle, un article publié dans l'*American Journal of Mathematics*, 1882, t. IV, pp. 282-292, et intitulé : *Forms of Rolle's Theorem*, by J. C. GLASHAN.

SUR
L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

PAR

Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

Présenté à la séance du 29 janvier 1885.

---

1. Dans une note qui a paru aux *Annales* de la Société (*), j'ai montré que les raisonnements par lesquels on prouve la généralité de l'intégrale, dans ces équations, sont insuffisants et conduisent même à des conséquences erronées.

D'accord avec moi sur ce point, M. P. Mansion (**) publia dans le volume suivant des *Annales* une démonstration exacte (***), et communiqua ensuite à la Société, en avril 1882 (IV), une remarque de M. A. Mayer, d'après laquelle Jacobi aurait déjà exposé, dans son mémoire *Dilucidationes de equationum vulgarium systematis* etc. (V), une théorie des équations partielles linéaires du premier ordre à l'abri de mes objections.

Ayant eu l'occasion récemment d'examiner ce mémoire, j'avoue

(*) Tome IV, p. 273, 2e partie.
(**) *Ibid*, p. 59, 1re partie.
(***) Tome V, p. 17, 2e partie.
(IV) Tome VI, p. 56, 1re partie.
(V) *Journal de Crelle*, t. XXIII, p. 1.

n'y avoir pas trouvé la confirmation de ce que dit M. A. Mayer, car la théorie qui s'y trouve exposée tombe précisément sous le coup des critiques que j'ai présentées. Sans doute, Jacobi ramène l'intégration de l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Xp + Yq = Z$$

(pour ne prendre ici que le cas de trois variables) à celle de l'équation homogène

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

en ce sens qu'il prouve que toute fonction $F(x, y, z)$ qui vérifie cette dernière, étant égalée à une constante arbitraire, fournit une solution de la première, et il part de là pour former l'intégrale générale de celle-ci, mais Jacobi n'a pas l'air de s'apercevoir que l'équation $F(x, y, z) = 0$ peut fournir une valeur de z vérifiant l'équation (1), sans que F satisfasse identiquement, quels que soient x, y, z, à l'équation (α) : il suffit qu'elle y satisfasse en vertu de l'équation $F(x, y, z) = 0$. Il se place donc à un point de vue trop restreint et, par suite, ne démontre pas complètement la généralité de l'intégrale.

La théorie que je propose ci-dessous me paraît lever ces difficultés. Par la forme remarquable sous laquelle elle présente l'équation (1), elle met immédiatement en évidence la généralité de l'intégrale connue.

2. Soit l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Xp + Yq = Z,$$

p et q désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; X, Y, Z des fonctions de x, y, z. Formons le système d'équations différentielles ordinaires

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

et soient $u = \alpha$, $v = \beta$ les intégrales générales de ce système, résolues par rapport aux constantes arbitraires α, β. On sait que u et v vérifient *identiquement*, quels que soient x, y, z, les égalités

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant en général par $D\left(\frac{u,\,v}{x,\,y}\right)$ le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

les relations identiques

$$(3) \quad \dots \quad \frac{X}{D\left(\frac{u,\,v}{y,\,z}\right)} = \frac{Y}{D\left(\frac{u,\,v}{z,\,x}\right)} = \frac{Z}{D\left(\frac{u,\,v}{x,\,y}\right)}.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire,

$$(4) \quad \dots \quad D\left(\frac{u,\,v}{x,\,y}\right) + pD\left(\frac{u,\,v}{z,\,y}\right) + qD\left(\frac{u,\,v}{x,\,z}\right) = 0.$$

Supposons maintenant que dans les fonctions u et v, on regarde z comme une fonction de x et de y, et que l'on forme, sous ce point de vue, les dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}, \dots$$

En désignant par de doubles parenthèses le déterminant fonc-

tionnel correspondant et le développant par les règles connues, on aura

$$D\left(\left(\frac{u,\, v}{x,\, y}\right)\right) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial y} + q\,\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + p\,\frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial y} + q\,\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= D\left(\frac{u,\, v}{x,\, y}\right) + pD\left(\frac{u,\, v}{z,\, y}\right) + qD\left(\frac{u,\, v}{x,\, z}\right).$$

L'équation (1) peut donc se mettre encore sous cette forme :

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D\left(\left(\frac{u,\, v}{x,\, y}\right)\right) = 0.$$

Ainsi, *pour qu'une fonction* z *de* x *et de* y *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles* (1), *il faut et il suffit que, mise dans les fonctions* u *et* v, *elle rende identiquement nul ce déterminant* (5), ce qui, d'après un théorème connu, est la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'il existe entre u et v une relation indépendante de x et de y,

$$v = \varphi(u).$$

Cette relation renferme donc toutes les solutions de l'équation (1) et n'en renferme pas d'autre.

3. Vérifions ces remarques sur l'exemple cité dans ma première note,

$$(A) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = 2z.$$

On a ici

$$u = ax - by, \qquad v = ze^{-2ax},$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2aze^{-2ax}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = e^{-2ax},$$

d'où encore

$$D\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = -2abze^{-2ax}, \quad D\left(\frac{u, v}{z, y}\right) = be^{-2ax}, \quad D\left(\frac{u, v}{x, z}\right) = ae^{-2ax},$$

et l'équation (4) prend ici la forme

$$abe^{-2ax}\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} - 2z\right) = 0.$$

Elle se confond, à un facteur près qui ne peut s'annuler, avec l'équation (A). D'après ce qui précède, il faut et il suffit, pour que cette équation soit vérifiée, que z satisfasse à une équation de la forme

$$ze^{-2ax} = \varphi(ax - by).$$

Or, l'intégrale $z = e^{ax+by}$, substituée dans le premier membre, donne

$$ze^{-2ax} = e^{-(ax-by)},$$

qui rentre bien, en effet, dans l'intégrale générale.

4. Passons au cas général où une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est définie par une équation

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdot \cdot + X_n p_n = Z;$$

formons le système d'équations simultanées

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z},$$

et ses intégrales générales

$$u_1 = \alpha_1, \quad u_2 = \alpha_2, \ldots, \quad u_n = \alpha_n,$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

des constantes arbitraires. D'après un théorème connu, on a identiquement, quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_n, z$,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} X_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + X_n \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + Z \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \\ X_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + X_n \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + Z \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + \cdots + X_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + Z \dfrac{\partial u_n}{\partial z} = 0, \end{array}\right.$$

équations qui, résolues au moyen des déterminants par rapport à $X_1 : Z$, $X_2 : Z$, etc., donnent immédiatement

$$\frac{X_1}{D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{z, x_2, \dots, x_n}\right)} = \frac{X_2}{D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, z, \dots, x_n}\right)} = \cdots$$

$$= \frac{X_n}{D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, z}\right)} = \frac{-Z}{D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right)}.$$

L'équation (6) est donc identiquement la même que celle-ci :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right) + p_1 D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{z, x_2, \dots, x_n}\right) \\ + p_2 D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, z, \dots, x_n}\right) + \cdots + p_n D\left(\dfrac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, z}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Concevons que, dans les fonctions $u_1, u_2, \dots, u_n$, on considère z comme une fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$, et que l'on forme, sous ce point de vue, les dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z}, \text{ etc.,}$$

ainsi que le déterminant fonctionnel

$$D\left(\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}\right)\right) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix}.$$

En substituant à ces dérivées partielles leurs valeurs ci-dessus, développant le déterminant par les règles ordinaires et supprimant les déterminants nuls comme ayant deux colonnes identiques, on a

$$D\left(\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}\right)\right) = D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}\right) + p_1 D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{z, x_2, \ldots, x_n}\right)$$

$$+ p_2 D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, z, \ldots, x_n}\right) + \cdots + p_n D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, z}\right),$$

et l'on en conclut que l'équation (6) n'est autre chose que l'égalité

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad D\left(\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}\right)\right) = 0.$$

Sous cette forme, on voit clairement qu'elle exprime la condition nécessaire et suffisante pour que $u_1, u_2, \ldots, u_n$, considérés comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soient liés entre eux par une relation indépendante des variables,

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

et que, par conséquent, pour qu'une fonction z de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifie l'équation (6), il faut et il suffit qu'elle soit comprise dans une relation de la forme (10).

5. Ce qui précède me parait aussi donner la clé d'un passage énigmatique de Jacobi (*), signalé à M. Mansion par M. A. Mayer. Bornons-nous au cas simple de l'équation

$$Xp + Yq = Z.$$

Il résulte des formules (3) que les coefficients X, Y, Z sont identiques, à un facteur M près qui ne peut renfermer que x, y, z, aux déterminants respectifs

$$D\left(\frac{u,\ v}{y,\ z}\right), \quad D\left(\frac{u,\ v}{z,\ x}\right), \quad D\left(\frac{u,\ v}{x,\ y}\right).$$

L'équation (1) peut donc être remplacée par (4), ou par (5), multipliée par M. Donc, s'il existe des solutions de l'équation (1) non comprises dans l'équation (5) ou dans la relation équivalente $v = \varphi(u)$, elles ne peuvent appartenir qu'à l'équation $M = 0$, et par conséquent on les trouvera sans intégration.

(*) Page 21 du mémoire cité.

SUR

LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE

AUTOUR D'UN POINT FIXE

ET SUR LE PENDULE CONIQUE

PAR

le C[te] de SPARRE

Professeur à la Faculté catholique de Lyon.

INTRODUCTION

Il existe déjà un nombre considérable de mémoires traitant des sujets dont je m'occupe ici, mais ce qui m'a semblé faire un peu défaut, c'est un exposé en quelque sorte classique de ces deux questions, et qui donne cependant les principaux résultats que l'on peut obtenir à leur sujet, par l'emploi des fonctions elliptiques. C'est cette lacune que je me suis efforcé de combler d'une façon, je l'espère, aussi simple que possible.

Pour la première question, celle du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, je me suis largement inspiré des beaux travaux de M. Hermite sur le même sujet en employant, toutefois, une voie toute différente de manière à rendre l'exposition indépendante de l'étude de l'équation de Lamé à laquelle M. Hermite l'avait rattachée.

J'ajoute de plus quelques résultats à ceux auxquels était parvenu M. Hermite. Je fais voir en particulier que les points stationnaires (points d'inflexions de l'herpolodie) sont toujours imaginaires. Ce dernier fait, assez important, n'avait pas été établi par M. Hermite, mais on aurait pu, ainsi que je le lui ai indiqué dans une lettre, le déduire de ses calculs en rectifiant une petite erreur qui s'y était glissée.

Pour la seconde question, le pendule conique, j'ai suivi, en y introduisant quelques simplifications, la marche que j'avais adoptée dans ma thèse sur le mouvement du pendule conique à la surface de la terre; j'ai eu soin toutefois de dégager cette étude de toutes les questions incidentes de manière à en donner un exposé aussi simple que possible.

I

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE LORSQU'IL N'Y A PAS DE FORCES EXTÉRIEURES.

Nous adopterons pour déterminer la position du solide les trois angles d'Euler φ, θ et ψ et nous désignerons par p, q, et r les composantes, suivant les trois axes principaux d'inertie du corps, de la vitesse angulaire de rotation instantanée.

Les équations du mouvement seront alors comme on sait

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp,$$

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq,$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad p = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta,$$

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad q = -\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta,$$

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta \;(*),$$

A, B, C étant les moments d'inertie principaux du corps.

(*) Voir *Traité de mécanique*, d'E. COLLIGNON. t. III, pp. 508 et suiv., ou PH. GILBERT, *Mécanique analytique*, pp. 285 et 286.

Des trois premières équations on déduit les deux suivantes où h et M désignent des constantes

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2,$$

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = M^2.$$

Ces deux équations sont, comme l'on sait, celle des forces vives et celle des moments des quantités de mouvement.

Si maintenant on prend pour axe des z du système de comparaison fixe, l'axe (fixe, dans le cas qui nous occupe) du couple résultant des quantités de mouvement, on aura de plus les trois équations suivantes, qui résultent de ce fait que cet axe est égal à M et que ses projections sur les axes principaux d'inertie sont : Ap, Bq, Cr.

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\theta \sin\varphi = \frac{Ap}{M},$$

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\theta \cos\varphi = \frac{Bq}{M},$$

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos\theta = \frac{Cr}{M}.$$

Des équations (7) et (8) on déduit

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p^2 = \frac{M^2 - Ch^2 - Bq^2(B - C)}{A(A - C)},$$

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r^2 = \frac{Ah^2 - M^2 - Bq^2(A - B)}{C(A - C)},$$

et en portant ces valeurs de p et de r dans l'équation (2), on obtient

$$dt = \pm \frac{B\sqrt{AC}\,dq}{\sqrt{\left[M^2 - Ch^2 - Bq^2(B - C)\right]\left[Ah^2 - M^2 - Bq^2(A - B)\right]}},$$

équation que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(14) \quad dt = \pm B\sqrt{\frac{AC}{(M^2 - Ch^2)(Ah^2 - M^2)}}\,\frac{dq}{\sqrt{\left(1 - \frac{B(B-C)}{M^2 - Ch^2}q^2\right)\left(1 - \frac{B(A-B)}{Ah^2 - M^2}q^2\right)}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait :

Soit $A > B > C$ hypothèse I,

Soit $A < B < C$ hypothèse II.

Comme

$$M^2 - Ch^2 = Ap^2(A - C) + Bq^2(B - C),$$
$$Ah^2 - M^2 = Bq^2(A - B) + Cr^2(A - C),$$

l'on aura dans ces deux hypothèses

$$(M^2 - Ch^2)(Ah^2 - M^2) > 0, \quad \frac{B - C}{M^2 - Ch^2} > 0, \quad \frac{A - B}{Ah^2 - M^2} > 0.$$

Je dis de plus que l'on pourra toujours choisir l'une ou l'autre des deux hypothèses de façon que l'on ait :

$$\frac{M^2 - Ch^2}{B(B - C)} < \frac{Ah^2 - M^2}{B(A - B)};$$

en effet, $(A - B)(B - C)$ étant positif dans les deux hypothèses, cette inégalité revient à

$$(A - C)(M^2 - Bh^2) < 0.$$

Or, B étant dans tous les cas le moment d'inertie moyen, on satisfera à cette condition en prenant l'hypothèse (II) si $M^2 > Bh^2$ et l'hypothèse (I) si $M^2 < Bh^2$.

Ceci établi, nous poserons :

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad q^2 = \frac{M^2 - Ch^2}{B(B - C)} \operatorname{sn}^2 u,$$

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad k^2 = \frac{(M^2 - Ch^2)(A - B)}{(Ah^2 - M^2)(B - C)}.$$

On en déduit

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad k'^2 = \frac{(Bh^2 - M^2)(A - C)}{(Ah^2 - M^2)(B - C)}.$$

Or, d'après les hypothèses admises plus haut, k^2 et k'^2 seront tous deux positifs et par suite aussi tous deux plus petits que 1.

Remplaçant alors q par la valeur (15) dans la formule (14) et faisant croître u et t dans le même sens, on aura

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dt = \sqrt{\frac{ABC}{(B-C)(Ah^2-M^2)}}\, du.$$

En prenant $t=0$ pour $u=0$, il viendra donc

$$t = \sqrt{\frac{ABC}{(B-C)(Ah^2-M^2)}}\, u.$$

On aura ensuite en portant la valeur de q^2 dans les formules (12) et (13)

$$p^2 = \frac{M^2 - Ch^2}{A(A-C)} \operatorname{cn}^2 u,$$

$$r^2 = \frac{Ah^2 - M^2}{C(A-C)} \operatorname{dn}^2 u.$$

Extrayons maintenant les racines carrées des valeurs de p^2, q^2, r^2 et désignons par ε, ε', ε'' des quantités égales à $+1$ ou à -1, nous aurons

$$p = \varepsilon \sqrt{\frac{M^2 - Ch^2}{A(A-C)}} \operatorname{cn} u,$$

$$q = \varepsilon' \sqrt{\frac{M^2 - Ch^2}{B(B-C)}} \operatorname{sn} u,$$

$$r = \varepsilon'' \sqrt{\frac{Ah^2 - M^2}{C(A-C)}} \operatorname{dn} u.$$

Sur les trois quantités ε, ε', ε'' on peut toujours choisir arbitrairement le signe de deux d'entre elles ; on peut, par exemple, prendre ε et ε'' égaux à $+1$; il suffira pour cela de choisir convenablement le sens de l'axe des x et de l'axe des z, dans le système de comparaison mobile, car ce sens est complètement arbitraire. Mais le sens de ces deux axes étant choisi arbitrairement, celui de l'axe des y, dans le système de comparaison mobile, se trouvera déterminé puisque la rotation de OZ vers OX doit être positive (de gauche à droite) par rapport à OY ; le signe

de ε' devra donc se déduire de celui de ε et ε''. On fixera ce signe de la manière suivante : en portant les valeurs obtenues plus haut de p, q et r dans les relations (1), (2) et (3), on devra avoir

$$-\varepsilon\sqrt{B-C}=\frac{\varepsilon'\varepsilon''(B-C)}{\sqrt{B-C}},$$

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon\varepsilon''(C-A)}{\sqrt{(A-C)^2}},$$

$$\frac{-\varepsilon''\sqrt{B-C}}{B-C}=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{B-C}}.$$

En prenant $\varepsilon=\varepsilon''=+1$, on voit que l'on satisfera à ces relations en prenant :

Dans l'hypothèse (I) $\varepsilon'=-1$,

Dans l'hypothèse (II) $\varepsilon'=+1$.

Nous aurons donc en résumé

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad p=\sqrt{\frac{M^2-Ch^2}{A(A-C)}}\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad q=\mp\sqrt{\frac{M^2-Ch^2}{B(B-C)}}\,\mathrm{sn}\,u,$$

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad r=\sqrt{\frac{Ah^2-M^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,u,$$

les radicaux étant tous pris en valeur absolue, et dans la valeur de q le signe supérieur correspond à l'hypothèse (I) et le signe inférieur à l'hypothèse (II).

On déduit ensuite des formules (9) (10) et (11)

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{tg}\,\varphi=\mp\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\,\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},$$

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{C(Ah^2-M^2)}{A-C}}\,\frac{\mathrm{dn}\,u}{M}.$$

Puis on tire des équations (4) et (5)

$$p\sin\theta\sin\varphi+q\sin\theta\cos\varphi=\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt},$$

c'est-à-dire à cause des relations (9), (10) et (7),

$$h^2 - Cr^2 = M \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Remplaçant maintenant r^2, $\sin^2\theta$ et dt par leurs valeurs en fonction de u déduites des formules (21), (23) et (18), on aura

$$d\psi = M \frac{\frac{B-C}{A-B} + \mathrm{sn}^2 u}{\frac{A(B-C)}{C(A-B)} + \mathrm{sn}^2 u} \sqrt{\frac{AB}{C(B-C)(Ah^2-M^2)}}\, du.$$

Posons maintenant

(24) . . . . . $$\mathrm{sn}\,\alpha i = \mp i \sqrt{\frac{B-C}{A-B}},$$

(25) . . . . . $$\mathrm{sn}\,\beta i = \mp i \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}},$$

où α et β sont des quantités réelles, les signes supérieurs correspondant toujours au cas de l'hypothèse (I) et les signes inférieurs au cas de l'hypothèse (II).

C'est-à-dire que si

$$Bh^2 > M^2,$$

nous supposons

$$A > B > C \quad \text{et} \quad \beta < \alpha < 0,$$

et si

$$Bh^2 < M^2,$$

nous supposons

$$A < B < C \quad \text{et} \quad \alpha > \beta > 0.$$

On aura d'ailleurs dans tous les cas

(26) . . . . . $$\mathrm{cn}\,\alpha i = \sqrt{\frac{A-C}{A-B}},$$

(27) . . . . . $$\mathrm{cn}\,\beta i = \sqrt{\frac{B(A-C)}{C(A-B)}},$$

(28) . . . . . $$\mathrm{dn}\,\alpha i = h\sqrt{\frac{A-C}{Ah^2-M^2}},$$

(29) . . . . . $$\mathrm{dn}\,\beta i = M\sqrt{\frac{A-C}{C(Ah^2-M^2)}}.$$

Avec les conventions admises pour les signes de α et β nous pourrons, dans tous les cas, écrire les valeurs de p, q et r des deux manières suivantes :

$$(30) \quad \ldots\ldots \; p = \sqrt{\frac{M^2 - Ch^2}{A(A-B)}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \alpha i},$$

$$(31) \quad \ldots\ldots \; q = i\sqrt{\frac{M^2 - Ch^2}{B(A-B)}} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} \alpha i},$$

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots \; r = \frac{h}{\sqrt{C}} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} \alpha i},$$

ou aussi

$$(33) \quad \ldots\ldots \; p = \sqrt{\frac{B(M^2 - Ch^2)}{AC(A-B)}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \beta i},$$

$$(34) \quad \ldots\ldots \; q = i\sqrt{\frac{A(M^2 - Ch^2)}{BC(A-B)}} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} \beta i},$$

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \; r = \frac{M}{C} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} \beta i}.$$

En introduisant de plus β et α, les formules (22) et (23) ainsi que la valeur de $\frac{d\varphi}{du}$ deviendront

$$(36) \quad \ldots\ldots \; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{i \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \beta i \operatorname{sn} u},$$

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \; \cos\theta = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} \beta i},$$

$$(38) \quad . \; \frac{d\psi}{du} = M\sqrt{\frac{AB}{C(B-C)(Ah^2 - M^2)}} \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha i}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \beta i},$$

les radicaux étant tous pris positivement, ainsi que nous l'avons déjà dit.

Pour obtenir ψ décomposons maintenant $\frac{d\psi}{du}$ en éléments simples par le théorème de M. Hermite.

Les infinis de la fonction sont évidemment βi et $-\beta i$; reste à obtenir les résidus correspondants.

Celui relatif à $u = \beta i$ sera

$$M\sqrt{\frac{AB}{C(B-C)(Ah^2-M^2)}}\ \frac{\mathrm{sn}^2\beta i - \mathrm{sn}^2\alpha i}{2\,\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}\,\beta i}.$$

Mais dans tous les cas

$$\mathrm{sn}^2\beta i - \mathrm{sn}^2\alpha i = -\frac{(B-C)(A-C)}{C(A-B)},$$

$$\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}\,\beta i = \mp\frac{iM(A-C)}{C(A-B)}\sqrt{\frac{AB(B-C)}{C(Ah^2-M^2)}}.$$

Le résidu de $\frac{d\psi}{du}$ relatif à $u = \beta i$ sera donc

$$\pm\frac{1}{2i}\frac{B-C}{\sqrt{(B-C)^2}}.$$

C'est-à-dire dans les deux hypothèses

$$\frac{1}{2i},$$

puisque les radicaux doivent être toujours pris positivement et que le signe supérieur correspond au cas de $B > C$ (hypothèse I) et le signe inférieur au cas de $B < C$ (hypothèse II).

On aura donc dans tous les cas avec les conventions adoptées

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{2i}\left[\frac{H'(u-\beta i)}{H(u-\beta i)} - \frac{H'(u+\beta i)}{H(u+\beta i)} + \frac{H'(\alpha i+\beta i)}{H(\alpha i+\beta i)} - \frac{H'(\alpha i-\beta i)}{H(\alpha i-\beta i)}\right].$$

Car le résidu relatif à $u = -\beta i$ est, comme on sait, égal et de signe contraire à celui relatif à $u = \beta i$ et de plus $\frac{d\psi}{du}$ doit admettre les zéros αi et $-\alpha i$.

Posons maintenant

$$\lambda = \frac{1}{2i}\left[\frac{H'(\alpha i+\beta i)}{H(\alpha i+\beta i)} - \frac{H'(\alpha i-\beta i)}{H(\alpha i-\beta i)}\right]$$

... avons

$$\frac{\ldots - \beta i)}{\ldots + \beta i)}.$$

...essions, en fonction de u, des ... au système de comparaison ... coordonnées, par rapport au ... sont ξ, η, ζ.

... de transformation d'Euler :

$$\ldots \eta(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + \zeta\sin\psi\sin\theta,$$

$$\ldots \eta(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - \zeta\cos\psi\sin\theta,$$

$$\ldots + \zeta\cos\theta.$$

... ire

$$\ldots \eta e^{\psi i}(\sin\varphi - i\cos\varphi\cos\theta) - i\zeta\sin\theta e^{\psi i}.$$

... aucune ambiguïté, puisque θ est toujours ... moyen de la formule (37)

$$\ldots \frac{k}{\mathrm{dn}\,\beta i}\sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \beta i}.$$

... (40) donnent ensuite

$$\ldots \frac{Ap}{M\sin\theta}, \quad \cos\varphi = \frac{Bq}{M\sin\theta}.$$

... moyen des formules (33), (34) et (40)

$$\ldots \sqrt{\frac{AB(M^2 - Ch^2)}{C(A - B)}}\,\frac{\mathrm{dn}\,\beta i}{\mathrm{cn}\,\beta i}\,\frac{\mathrm{cn}\,u}{\sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \beta i}},$$

$$\ldots \sqrt{\frac{AB(M^2 - Ch^2)}{C(A - B)}}\,\frac{\mathrm{dn}\,\beta i}{\mathrm{sn}\,\beta i}\,\frac{\mathrm{sn}\,u}{\sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \beta i}}.$$

Ces formules donnent d'ailleurs cos φ et sin φ sans aucune ambiguïté, puisque le signe β se détermine comme nous l'avons dit plus haut et que les radicaux doivent, d'après ce qui précède, être tous pris positivement.

En remplaçant sin φ, cos φ, sin θ et cos θ par leurs valeurs (41), (42), (40) et (37) dans l'expression de X + iY, on aura

$$X + iY = \sqrt{\frac{AB(M^2 - Ch^2)}{C(A-B)}} \frac{1}{Mk \operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i} \frac{e^{\psi i}}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \beta i}}$$

$$[\xi i(\operatorname{sn} u \operatorname{cn}\beta i \operatorname{dn}\beta i + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}\beta i) - \eta(\operatorname{cn} u \operatorname{sn}\beta i \operatorname{dn}\beta i + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}\beta i)]$$

$$-i\frac{\zeta e^{\psi i} k\sqrt{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\beta i}}{\operatorname{dn}\beta i}.$$

Mais au moyen de la formule (39) on a d'abord

$$(43) \quad \dots\dots \quad e^{\psi i} = e^{\lambda i u}\sqrt{\frac{H(u-\beta i)}{H(u+\beta i)}},$$

ce radical devant être, comme tous les autres, pris positivement puisque pour $u = 0$ on doit avoir $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Si l'on considère maintenant la fonction doublement périodique de première espèce

$$\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \beta i,$$

comme elle admet les zéros $-\beta i$ et βi et l'infini double ik' elle est égale en désignant par S une constante à

$$S\frac{H(u-\beta i)H(u+\beta i)}{\Theta^2(u)},$$

et en déterminant la constante pour $u = 0$ on a

$$(44) \quad \dots \quad \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\beta i = \frac{\Theta^2(0)H(u-\beta i)H(u+\beta i)}{k\Theta^2(\beta i)\Theta^2(u)}.$$

Si l'on considère maintenant la fonction

$$\operatorname{sn} u \operatorname{cn} \beta i \operatorname{dn} \beta i + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} \beta i$$

qui admet la période $2iK'$ et qui change de signe lorsqu'on remplace u par $u + 2K$, on voit d'abord qu'elle admet le zéro $u = -\beta i$ et l'infini double $u = iK'$; mais si l'on change dans cette fonction u en $u + iK'$, elle devient

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} \beta i \operatorname{dn} \beta i - \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} \beta i}{k \operatorname{sn}^2 u}.$$

On en conclut que la fonction proposée admet aussi le zéro $u = iK' + \beta i$, et par suite, en désignant par T une constante, elle est égale à

$$T\frac{H(u + \beta i)\,\Theta(u - \beta i)}{\Theta^2(u)},$$

et en déterminant la constante pour $u = 0$, on aura

$$(45)\quad \operatorname{sn} u \operatorname{cn} \beta i \operatorname{dn} \beta i + \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u+\beta i)\,\Theta(u-\beta i)\,\Theta^2(0)}{\Theta^2(\beta i)\,\Theta^2(u)}.$$

On obtiendra d'une façon semblable la relation

$$(46)\quad \operatorname{cn} u \operatorname{sn} \beta i \operatorname{dn} \beta i + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} \beta i = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(u+\beta i)\,\Theta_1(u-\beta i)\,\Theta^2(0)}{\Theta^2(\beta i)\,\Theta^2(u)}.$$

Il suffit de remarquer que le premier membre, qui change de signe lorsqu'on remplace u par $u + 2K$ ou par $u + 2iK'$, a d'abord l'infini double iK' et le zéro $-\beta i$ et que de plus en y changeant u en $u + K + iK'$ on met en évidence le zéro $K + iK' + \beta i$.

Au moyen des formules (43), (44), (45) et (46) on aura

$$(47)\quad X + iY = \sqrt{\frac{AB(M^2 - Ch^2)}{C(A - B)}}\,\frac{e^{\lambda i u}}{Mk \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i}\,\frac{\Theta(0)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)}$$

$$\left[\xi i\,\Theta(u-\beta i) - \eta\sqrt{k'}\,\Theta_1(u-\beta i)\right] - \frac{i\zeta\sqrt{k}}{\operatorname{dn} \beta i}\,e^{\lambda i u}\,\frac{\Theta(0)\,H(u-\beta i)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)};$$

en changeant i en $-i$ on en déduira $X - iY$.

On aura ensuite

$$(48)\quad Z = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{AB(M^2 - Ch^2)}{C(A-B)}}\left[\frac{\xi \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\beta i} + \frac{\eta i \operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}\beta i}\right] + \zeta\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn}\beta i}.$$

Cherchons maintenant l'équation de l'herpolodie.

On peut l'obtenir en faisant dans les formules précédentes

$$\xi = \frac{p\rho}{\omega}, \quad \eta = \frac{q\rho}{\omega}, \quad \zeta = \frac{r\rho}{\omega},$$

où ω désigne la vitesse angulaire de rotation instantanée et ρ le rayon vecteur de l'ellipsoïde d'inertie dirigé suivant l'axe instantané.

Mais comme l'on sait, $\frac{\omega^2}{\rho^2}$ n'est autre chose que la face vive totale h^2; on devra donc pour avoir l'équation de l'herpolodie faire dans les formules (47) et (48)

$$\xi = \frac{p}{h}, \quad \eta = \frac{q}{h}, \quad \zeta = \frac{r}{h}.$$

Nous prendrons donc à cause des formules (33), (34) et (35)

$$\xi = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{B(M^2 - Ch^2)}{AC(A-B)}}\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\beta i}, \qquad \eta = \frac{i}{h}\sqrt{\frac{A(M^2 - Ch^2)}{BC(A-B)}}\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}\beta i},$$

$$\zeta = \frac{M}{Ch}\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{dn}\beta i}.$$

La formule (48) donne d'abord

$$Z = \frac{1}{Mh}\frac{M^2 - Ch^2}{C(A-B)}\left[\frac{B \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\beta i} - \frac{A \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2\beta i}\right] + \frac{M}{Ch}\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2\beta i},$$

ou en réduisant

$$Z = \frac{h}{M}.$$

C'est un résultat connu d'avance, et qui n'est qu'une vérification des calculs précédents.

On aura ensuite

$$X + iY = \frac{M^2 - Ch^2}{C(A-B)} \frac{ie^{\lambda iu}}{hMk\,\mathrm{sn}^2\beta i\,\mathrm{cn}^2\beta i} \frac{\Theta(0)\,\Theta(u-\beta i)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)}$$

$$\left[B\,\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,u - A\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}(u-\beta i) - \frac{M^2k^2\mathrm{sn}^2\beta i\,\mathrm{cn}^2\beta i(A-B)}{(M^2-Ch^2)\,\mathrm{dn}^2\beta i}\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\beta i)\right].$$

Mais l'on a

$$\frac{M^2k^2\,\mathrm{sn}^2\beta i\,\mathrm{cn}^2\beta i\,(A-B)}{\mathrm{dn}^2\beta i\,(M^2-Ch^2)} = -\frac{AB}{C}.$$

La fonction entre crochets devient donc

$$B\,\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,u - A\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}\,(u-\beta i) + \frac{AB}{C}\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,(u-\beta i).$$

Cette fonction change de signe lorsqu'on remplace u par $u + 2K$ et u par $u + 2iK'$; elle admet donc la périodicité de $\mathrm{cn}\,u$, elle semble à première vue admettre les infinis iK' et $iK' + \beta i$, mais si l'on fait $u = iK' + \varepsilon$, elle devient

$$\frac{i}{k\,\mathrm{sn}\,\varepsilon\,\mathrm{sn}(\varepsilon-\beta i)}\left[A\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{cn}(\varepsilon-\beta i) - B\,\mathrm{dn}\,\varepsilon\,\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{sn}(\varepsilon-\beta i) - \frac{AB}{C}\,\mathrm{cn}\,\varepsilon\right].$$

Or pour $\varepsilon = 0$ la parenthèse devient nulle, car on a, ainsi qu'il est bien facile de le vérifier,

$$A\,\mathrm{cn}^2\beta i + B\,\mathrm{sn}^2\beta i - \frac{AB}{C} = 0;$$

$u = iK'$ n'est donc pas un infini pour la fonction.

Celle-ci ayant donc un seul infini $u = iK' + \beta i$ dans le parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$ et admettant la périodicité de $\mathrm{cn}\,(u - \beta i)$, elle est forcément égale à cette quantité multipliée par une constante. (On vérifierait d'ailleurs bien facilement que la fonction est nulle pour $u = K + \beta i$.)

On a donc en désignant par H une constante

$$B \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} u - A \operatorname{sn} u \operatorname{cn} \beta i \operatorname{dn}(u-\beta i) + \frac{AB}{C} \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u-\beta i) = H \operatorname{cn}(u-\beta i)$$

et en faisant $u = \beta i$ on a

$$H = -(A - B) \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i.$$

La fonction entre crochets se réduit donc à

$$-(A - B) \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i \operatorname{cn}(u - \beta i)$$

et l'on a

$$X + iY = -\frac{(M^2 - Ch^2)\, i e^{\lambda u i}}{CMkh \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i} \; \frac{\Theta(0)\,\Theta(u - \beta i)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)} \operatorname{cn}(u - \beta i),$$

ce qui avec une réduction facile donnera enfin (*)

$$(49) \quad x + iy = \sqrt{\frac{(Ah^2 \quad M^2)(M^2 - Ch^2)(A - B)}{AB(A - C)}} \, \frac{e^{\lambda u i}}{Mh} \sqrt{\frac{k'}{k}} \, \frac{\Theta(0) H_1(u - \beta i)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)};$$

en changeant i en $-i$ on aura ensuite

$$(50) \quad x - iy = \sqrt{\frac{(M^2 - Ch^2)(Ah^2 - M^2)(A - B)}{AB(A - C)}} \, \frac{e^{-\lambda i u}}{Mh} \sqrt{\frac{k'}{k}} \, \frac{\Theta(0) H_1(u + \beta i)}{\Theta(\beta i)\,\Theta(u)}.$$

Cherchons les coordonnées polaires l et v de l'herpilodie, on a

$$l e^{vi} = x + iy,$$
$$l e^{-vi} = x - iy,$$

et par suite

$$l^2 = x^2 + y^2, \qquad e^{2vi} = \frac{x + iy}{x - iy}.$$

Donc

$$l^2 = \frac{(M^2 - Ch^2)(Ah^2 - M^2)(A - B)}{M^2 AB (A - C) h^2} \, \frac{k'}{k} \, \frac{\Theta^2(0) H_1(u - \beta i) H_1(u + \beta i)}{\Theta^2(\beta i)\,\Theta^2(u)}.$$

Mais la fonction

$$\frac{\Theta^2(0) H_1(u - \beta i) H_1(u + \beta i)}{\Theta^2(\beta i)\,\Theta^2(u)},$$

(*) En remplaçant de plus dans ce qui suit X et Y par x et y, pour plus de facilité dans l'écriture.

qui admet les périodes $2K$ et $2iK'$, a les zéros $K + \beta i$, $K - \beta i$ et l'infini double iK' est égal, à un facteur près, à

$$\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2(K + \beta i).$$

On a par suite, en déterminant convenablement cette constante,

$$\frac{k'}{k}\frac{\Theta^2(0)\,H_1(u-\beta i)\,H_1(u+\beta i)}{\Theta^2(\beta i)\,\Theta^2(u)} = \mathrm{cn}^2\beta i - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2\beta i.$$

Donc en définitive

$$(51)\qquad l^2 = \frac{(M^2 - Ch^2)(A - B)}{h^2ABC}\left[\frac{B(Ah^2 - M^2)}{M^2(A - B)} - \mathrm{sn}^2 u\right].$$

Ensuite

$$e^{2vi} = e^{2\lambda iu}\frac{H_1(u-\beta i)}{H_1(u+\beta i)},$$

d'où

$$(52)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad v = \lambda u + \frac{1}{2i}\,L\,\frac{H_1(u-\beta i)}{H_1(u+\beta i)},$$

l oscillera entre deux valeurs-limites l_1 et l_2 correspondant à $u = 0$ et $u = K$ qui seront donnés par les formules

$$l_1^2 = \frac{(M^2 - Ch^2)(Ah^2 - M^2)}{M^2ACh^2},$$

$$l_2^2 = \frac{(M^2 - Ch^2)(Bh^2 - M^2)}{M^2BCh^2}.$$

Ces valeurs de l_1 et l_2 seront toutes deux réelles d'après les conditions que nous avons posées et l ne s'annulera jamais; $\frac{dv}{du}$ est toujours positif.

On a en effet

$$\frac{dv}{du} = \lambda + \frac{1}{2i}\frac{H_1'(u-\beta i)}{H_1(u-\beta i)} - \frac{1}{2i}\frac{H_1'(u+\beta i)}{H_1(u+\beta i)} = H\,\frac{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2(K+\alpha i)}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2(K+\beta i)},$$

où H désigne une constante que l'on détermine en faisant $u = iK'$; on a ainsi (*)

$$2iH = \frac{H'(\alpha i + \beta i)}{H(\alpha i + \beta i)} + \frac{H'(\beta i - \alpha i)}{H(\beta i - \alpha i)} - 2\frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)}.$$

Pour obtenir cette valeur de H sous une forme plus simple, nous remarquerons que

$$\frac{H'(x + \alpha i)}{H(x + \alpha i)} + \frac{H'(x - \alpha i)}{H(x - \alpha i)} - 2\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}$$

est la dérivée logarithmique de

$$\frac{H(x + \alpha i)\, H(x - \alpha i)}{\Theta_1^2(x)},$$

ou, ce qui revient au même, de

$$\frac{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 \alpha i}{\operatorname{dn}^2 x}.$$

On a donc

$$\frac{H'(x+\alpha i)}{H(x+\alpha i)} + \frac{H'(x-\alpha i)}{H(x-\alpha i)} - 2\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} = 2\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 \alpha i} + 2k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}.$$

On en déduit

$$(53)\quad 2iH = 2\frac{\operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i \operatorname{dn}^2 \alpha i}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)\operatorname{dn} \beta i} = \frac{2ih^2}{M}\sqrt{\frac{ABC}{(B - C)(Ah^2 - M^2)}}.$$

Donc

$$\frac{dv}{du} = \frac{h^2}{M}\sqrt{\frac{ABC}{(B - C)(Ah^2 - M^2)}}\,\frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(K + \alpha i)}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(K + \beta i)},$$

valeur toujours positive puisque $\operatorname{sn}^2(K + \alpha i)$ et $\operatorname{sn}^2(K + \beta i)$ sont tous deux plus grands que un.

Pour $u = 0$ on a $v = 0$;
pour $u = K$ on a $v = \lambda K \mp \frac{\pi}{2}$,

(*) A cause de la valeur de λ (p. 9).

le signe supérieur correspondant à l'hypothèse (I), le signe inférieur à l'hypothèse (II).

On peut le voir de la manière suivante, qui fait connaître en même temps une propriété du mouvement.

Supposons que l'on rapporte l'herpolodie à des axes mobiles dans le plan des xy autour du point O et faisant un angle χ variable avec les premiers; on aura x_1 et y_1 étant les nouvelles coordonnées

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)e^{-\chi i},$$

et par suite en vertu de la formule (49)

$$x_1 + iy_1 = \sqrt{\frac{(Ah^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)(A-B)}{AB(A-C)}}\,\frac{e^{(\lambda u - \chi)i}}{Mh}\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\Theta(0)H_1(u - \beta i)}{\Theta(\beta i)\Theta(u)},$$

et si l'on prend

$$\chi = \lambda u$$

on aura

$$x_1 + iy_1 = \sqrt{\frac{(Ah^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)(A-B)}{AB(A-C)}}\,\frac{1}{Mh}\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\Theta(0)H_1(u - \beta i)}{\Theta(\beta i)\Theta(u)}.$$

On en conclut que par rapport aux axes mobiles qui font avec les axes fixes un angle $\chi = \lambda u$ le pôle instantané décrit une courbe fermée; car en changeant u en $u + 4K$, $x_1 + iy_1$ ne change pas.

Les axes mobiles tournent par rapport aux axes fixes avec une vitesse angulaire constante

$$\frac{d\chi}{dt} = \lambda\frac{du}{dt} = \lambda\sqrt{\frac{(B-C)(Ah^2 - M^2)}{ABC}}.$$

Sur la courbe mobile le mouvement se fait dans le sens positif, c'est-à-dire de ox_1 vers oy_1 si β est positif, hypothèse (II), et dans le sens négatif, de oy_1 vers ox_1 si β est négatif, hypothèse (I).

Pour $u = 0$ on a en effet

$$x_1 = \frac{1}{Mh}\sqrt{\frac{(Ah^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)(A-B)}{AB(A-C)}}\ \mathrm{cn}\,\beta i,$$

ou

$$x_1 = \frac{1}{Mh}\sqrt{\frac{(Ah^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)}{AC}},$$

et pour $u = K$

$$iy_1 = \frac{1}{Mh}\sqrt{\frac{(Ah^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)(A - B)}{AB(A - C)}}\, k' \operatorname{sn} \beta i,$$

c'est-à-dire

$$y_1 = \frac{\mp 1}{Mh}\sqrt{\frac{(Bh^2 - M^2)(M^2 - Ch^2)}{BC}},$$

le signe supérieur correspondant toujours à l'hypothèse (I) où $\beta < 0$ et le signe inférieur à l'hypothèse (II) où $\beta > 0$.

On voit donc bien que y_1 est négatif dans l'hypothèse (I) et positif dans l'hypothèse (II).

On conclut aussi de ce qui précède que l'on a, comme nous l'avions annoncé, pour $u = K$,

$$v = \lambda k \mp \frac{\pi}{2}.$$

$\frac{dv}{du}$ étant d'après ce que nous avons dit toujours positif dans le cas de l'hypothèse (I), on doit avoir

$$\lambda k > \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda > \frac{\pi}{2k},$$

la valeur de v pour $u = K$ devant être positive.

Je dis de plus que lorsque $\beta > 0$ on a $\lambda > 0$.

Supposons donc α et β positifs, on a alors, d'après les hypothèses que nous avons admises,

$$A < B < C.$$

Mais au moyen de formules bien connues on a

$$\operatorname{sn}(\alpha, k') = \frac{1}{i}\frac{\operatorname{sn} \alpha i}{\operatorname{cn} \alpha i} = \sqrt{\frac{B - C}{A - C}},$$

$$\operatorname{sn}(\beta, k') = \frac{1}{i}\frac{\operatorname{sn} \beta i}{\operatorname{cn} \beta i} = \sqrt{\frac{A(B - C)}{B(A - C)}},$$

et par suite

$$(54) \quad . \quad . \ \mathrm{sn}^2(\alpha, k') - \mathrm{sn}^2(\beta, k') = \frac{(B - C)(B - A)}{B(A - C)} > 0,$$

et comme α et β sont tous deux plus petits que K′, on en déduit

$$K' > \alpha > \beta > 0.$$

Mais

$$\lambda = \frac{1}{2i}\left[\frac{H'(\alpha i + \beta i)}{H(\alpha i + \beta i)} - \frac{H'(\alpha i - \beta i)}{H(\alpha i - \beta i)}\right].$$

Or de la relation

$$\frac{\Theta'(x + iK')}{\Theta(x + iK')} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{i\pi}{2k}$$

on déduit en changeant x en $-x$

$$(55) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{H'(x)}{H(x)} = -\frac{\Theta'(iK' - x)}{\Theta(iK' - x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

On aura donc

$$\lambda = \frac{1}{2i}\left[\frac{\Theta'(iK' - \alpha i + \beta i)}{\Theta(iK' - \alpha i + \beta i)} - \frac{\Theta'(iK' - \alpha i - \beta i)}{\Theta(iK' - \alpha i - \beta i)}\right].$$

Posons

$$K' - \alpha + \beta = \mu, \quad K' - \alpha - \beta = \nu,$$

à cause de la relation

$$K' > \alpha > \beta > 0,$$

on aura

$$0 < \mu < K', \quad -K' < \nu < \mu.$$

La relation

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K}x - \int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 x dx \ (*)$$

donne alors

$$\lambda = \frac{J}{2K}(\mu - \nu) - \frac{1}{2i}\int_0^{\mu i} k^2 \mathrm{sn}^2 u du + \frac{1}{2i}\int^{\nu i} k^2 \mathrm{sn}^2 u du$$

(*) $J = \int_0^K k^2 \mathrm{sn}^2 x dx.$

ou

$$\lambda = \frac{J}{2K}(\mu - \nu) - \frac{1}{2i}\int_{\nu i}^{\mu i} k^2 \operatorname{sn}^2 u du.$$

Mais en posant $u = iz$ et tenant compte de la relation

$$\operatorname{sn}^2(iz, k) = -\frac{\operatorname{sn}^2(z, k')}{\operatorname{cn}^2(z, k')} (*),$$

on aura

$$\lambda = \frac{J}{2K}(\mu - \nu) + \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\mu} k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(z, k')}{\operatorname{cn}^2(z, k')} dz,$$

et comme $\mu > \nu$ on voit que dans ce cas λ est positif.

Dans le cas où α et β sont négatifs, nous avons vu que l'on doit avoir $\lambda > \frac{\pi}{2K}$; on peut d'ailleurs établir directement cette propriété de la manière suivante :

Soit donc $\alpha = -\alpha_1$, $\beta = -\beta_1$, comme dans le cas qui nous occupe $A > B > C$, la relation (54) fait voir que l'on a

$$K' > \beta_1 > \alpha_1.$$

Mais on aura dans le cas qui nous occupe

$$\lambda = -\frac{1}{2i}\left[\frac{H'(\alpha_1 i + \beta_1 i)}{H(\alpha_1 i + \beta_1 i)} + \frac{H'(\beta_1 i - \alpha_1 i)}{H(\beta_1 i - \alpha_1 i)}\right],$$

et au moyen de la relation (55)

$$\lambda = \frac{\pi}{2K} + \frac{1}{2i}\left[\frac{\Theta'(iK' - \alpha_1 i - \beta_1 i)}{\Theta(iK' - \alpha_1 i - \beta_1 i)} + \frac{\Theta'(iK' - \beta_1 i + \alpha_1 i)}{\Theta(iK' - \beta_1 i + \alpha_1 i)}\right].$$

Posons ici

$$\mu_1 = K' + \alpha_1 - \beta_1, \quad \nu_1 = K' - \alpha_1 - \beta_1.$$

On aura

$$K' > \mu_1 > 0, \quad \mu_1 > -\nu_1 > -K'.$$

(*) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 372.

Mais en opérant comme plus haut on aura

$$\lambda = \frac{\pi}{2K} + \frac{J}{2K}(\nu_1 + \mu_1) + \frac{1}{2}\int_{-\nu_1}^{\mu_1} k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(z_1 k')}{\operatorname{cn}^2(z_1 k')} dz .$$

Ce qui fait bien voir que, ainsi que nous l'avions déjà établi autrement, on a dans ce cas

$$\lambda > \frac{\pi}{2K}.$$

Cherchons maintenant le rayon de courbure R de l'herpolodie. On a

(56) . . . . $$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' x' - x'' y'}.$$

Nous allons nous proposer de calculer

$$x'^2 + y'^2 \quad \text{et} \quad y'' x' - x'' y'.$$

Pour cela nous remarquerons que ces deux quantités sont des fonctions doublement périodiques de première espèce.

En effet on a d'abord

(57) . . . $$x'^2 + y'^2 = D_u(x + iy) . D_u(x - iy).$$

Or $x + iy$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce aux périodes 2K et $2iK'$ qui admet les multiplicateurs correspondants $-e^{2\lambda Ki}$ et $-e^{-2\lambda K' - \frac{\pi\beta}{K}}$ et il en est de même de ses dérivées. $x - iy$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce aux périodes 2K et $2iK'$, admettant les multiplicateurs correspondants

$$-e^{-2\lambda Ki} \quad \text{et} \quad -e^{2\lambda K' + \frac{\pi\beta}{K}},$$

et il en sera de même de ses dérivées.

Il résulte de là que $x'^2 + y'^2$ est une fonction doublement périodique ordinaire.

Il en sera de même de $y''x' - x''y'$, car on a

(58) $2i(y''x' - x''y') = D_u^2(x+iy).D_u(x-iy) - D_u^2(x-iy)D_u(x+iy)$

De plus $x + iy$ et $x - iy$ admettant dans le parallélogramme le seul infini iK', il en sera de même de leurs dérivées et par suite aussi de $x'^2 + y'^2$ et de $x'y'' - y'x''$.

Ces deux fonctions sont donc bien des fonctions doublement périodiques de première espèce avec les périodes 2K et 2iK' et le seul infini iK'.

Proposons-nous d'abord d'obtenir la décomposition en éléments simples de $x'^2 + y'^2$; il nous faut pour cela obtenir la partie principale de son développement pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$.

Mais l'on a

(59) . . $x'^2 + y'^2 = (x^2 + y^2)\, D_u L(x + iy)\, D_u L(x - iy)$;

il nous suffira donc d'obtenir le développement des trois facteurs du second membre pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$.

On a d'abord par la formule (31)

$$x^2 + y^2 = l^2 = \frac{(\mathrm{M}^2 - \mathrm{C}h^2)(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{h^2\mathrm{ABC}}\left[\frac{\mathrm{B}(\mathrm{A}h^2 - \mathrm{M}^2)}{\mathrm{M}^2(\mathrm{A} - \mathrm{B})} - \mathrm{sn}^2 u\right],$$

ou

(60) . $$x^2 + y^2 = \frac{(\mathrm{A}h^2 - \mathrm{M}^2)(\mathrm{B} - \mathrm{C})}{h^2\mathrm{ABC}}\left[\frac{k^2\mathrm{cn}^2\beta i}{\mathrm{dn}^2\beta i} - k^2\mathrm{sn}^2 u\right],$$

et pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$

$$(x^2 + y^2)_{i\mathrm{K}'} = \frac{(\mathrm{A}h^2 - \mathrm{M}^2)(\mathrm{B} - \mathrm{C})}{h^2\mathrm{ABC}}\left[\frac{k^2\mathrm{cn}^2\beta i}{\mathrm{dn}^2\beta i} - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1 + k^2}{3}\right],$$

à cause de la relation

$$k^2\mathrm{sn}^2(i\mathrm{K}' + \varepsilon) = \frac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1 + k^2}{3}.$$

On a ensuite

$$D_u L(x + iy) = \lambda i + \frac{\mathrm{H}_1'(u - \beta i)}{\mathrm{H}_1(u - \beta i)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

et par suite pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$

(61) . . $\mathrm{D}_u \mathrm{L}(x + iy)_{i\mathrm{K}'} = \lambda i + \frac{\Theta_1'(\varepsilon - \beta i)}{\Theta_1(\varepsilon - \beta i)} - \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)}.$

Mais

$$\frac{\Theta_1'(\varepsilon + \beta i)}{\Theta_1(\varepsilon + \beta i)} = \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} + \varepsilon \mathrm{D} \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \mathrm{D}^2 \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)},$$

et de la relation bien connue

$$\mathrm{D}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2 u$$

on déduit

$$\mathrm{D}\frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta(\beta i)} = \mathrm{D}\frac{\Theta'(\beta i + \mathrm{K})}{\Theta(\beta i + \mathrm{K})} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2(\beta i + \mathrm{K}) = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \frac{\operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i},$$

$$\mathrm{D}^2 \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} = -2k^2 \operatorname{sn}(\beta i + \mathrm{K}) \operatorname{cn}(\beta i + \mathrm{K}) \operatorname{dn}(\beta i + \mathrm{K}) = 2k^2 k'^2 \frac{\operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i}{\operatorname{dn}^3 \beta i},$$

et par suite on a

$$\frac{\Theta_1'(\varepsilon + \beta i)}{\Theta_1(\varepsilon + \beta i)} = \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} + \varepsilon \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i}\right) + \varepsilon^2 \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn} \beta i \operatorname{cn} \beta i}{\operatorname{dn}^3 \beta i}.$$

On a ensuite

$$\mathrm{D}\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} = \mathrm{D}\frac{\Theta'(\varepsilon + i\mathrm{K}')}{\Theta(\varepsilon + i\mathrm{K}')} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2(\varepsilon + i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon},$$

ou

$$\mathrm{D}\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1 + k^2}{3},$$

et par suite en intégrant

$$\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{1 + k^2}{3}\right)\varepsilon$$

sans qu'il y ait à introduire de constante puisque $\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)}$ est une fonction impaire.

La formule (61) deviendra donc

$$D_u L(x+iy)_{iK'} = -\frac{1}{\varepsilon} + \lambda i - \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} - \left[\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i} - \frac{1+k^2}{3}\right]\varepsilon$$
$$- \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i}{\operatorname{dn}^3 \beta i}\varepsilon^2.$$

Mais nous avons déjà obtenu plus haut, formule (53),

$$\lambda i - \frac{\Theta_1'(\beta i)}{\Theta_1(\beta i)} = \frac{\operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i \operatorname{dn}^2 \alpha i}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)\operatorname{dn}\beta i}.$$

On aura donc enfin

$$(62)\quad D_u L(x+iy)_{iK'} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i \operatorname{dn}^2 \alpha i}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)\operatorname{dn}\beta i} - \left[\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i} - \frac{1+k^2}{3}\right]\varepsilon$$
$$- \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i}{\operatorname{dn}^3 \beta i}\varepsilon^2;$$

en changeant i en $-i$ on aura

$$D_u L(x-iy)_{iK'} = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i \operatorname{dn}^2 \alpha i}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)\operatorname{dn}\beta i} - \left[\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i} - \frac{1+k^2}{3}\right]\varepsilon$$
$$+ \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i}{\operatorname{dn}^3 \beta i}\varepsilon^2,$$

et par suite

$$D_u L(x+iy)_{iK'} \cdot D_u L(x-iy)_{iK'} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\operatorname{sn}^2 \beta i \operatorname{cn}^2 \beta i \operatorname{dn}^4 \alpha i}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)^2 \operatorname{dn}^2 \beta i}$$
$$+ 2\left[\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 \beta i}{\operatorname{dn}^2 \beta i} - \frac{1+k^2}{3}\right];$$

en posant

$$(63)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad Q = \frac{(Ah^2 - M^2)(B - C)}{ABCh^2},$$

on aura donc au moyen des formules précédentes

$$\frac{1}{Q}(x'^2 + y'^2)_{iK'} = -\frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{\operatorname{cn}^2 \beta i(\operatorname{sn}^2 \beta i - k^2 \operatorname{sn}^4 \alpha i)}{(\operatorname{sn}^2 \beta i - \operatorname{sn}^2 \alpha i)^2} + \frac{1+k^2}{3}\right].$$

On voit donc qu'en désignant par S une constante il viendra

$$x'^2+y'^2=Q\left[S-\left[\frac{1+k^2}{3}+\frac{\mathrm{cn}^2\beta i(\mathrm{sn}^2\beta i-k^2\mathrm{sn}^4\alpha i)}{(\mathrm{sn}^2\beta i-\mathrm{sn}^2\alpha i)^2}\right]D_u\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+\frac{1}{6}D_u^3\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right].$$

Mais de la relation

$$D_u\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=\frac{J}{K}-k^2\,\mathrm{sn}^2 u=\frac{J}{K}-1+\mathrm{dn}^2 u$$

on déduit

$$D_u^3\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=-2\left[k'^2-2(1+k'^2)\,\mathrm{dn}^2 u+3\,\mathrm{dn}^4 u\right],$$

et par suite S_1 désignant une nouvelle constante

$$x'^2+y'^2=Q\left[S_1+\left[k'^2+\frac{(k^2\mathrm{sn}^4\alpha i-\mathrm{sn}^2\beta i)\,\mathrm{cn}^2\beta i}{(\mathrm{sn}^2\beta i-\mathrm{sn}^2\alpha i)^2}\right]\mathrm{dn}^2 u-\mathrm{dn}^4 u\right],$$

ou enfin

$$x'^2+y'^2=Q\left[S_1+\left[k'^2+\frac{B[A(Ah^2-M^2)+C(M^2-Ch^2)]}{(B-C)(A-C)(Ah^2-M^2)}\right]\mathrm{dn}^2 u-\mathrm{dn}^4 u\right].$$

Pour déterminer S_1 nous remarquerons que, pour $u=K+iK'$, on a, en vertu des relations (59), (60), (61) et (63),

$$(x'^2+y'^2)_{K+iK'}=-Q\left[\frac{B(M^2-Ch^2)}{M^2(B-C)}-1\right]\left[\lambda i-\frac{\Theta'(\beta i)}{\Theta(\beta i)}\right]^2.$$

Mais la relation

$$\frac{H'(u-\alpha i)}{H(u-\alpha i)}+\frac{H'(u+\alpha i)}{H(u+\alpha i)}-2\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=D_u L(\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\alpha i)$$

donne

$$\frac{H'(u-\alpha i)}{H(u-\alpha i)}+\frac{H'(u+\alpha i)}{H(u+\alpha i)}-2\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\alpha i},$$

et par suite

(64) . . . . $$\lambda i-\frac{\Theta'(\beta i)}{\Theta(\beta i)}=\frac{\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}\,\beta i}{\mathrm{sn}^2\beta i-\mathrm{sn}^2\alpha i}.$$

On en déduit

$$(x'^2 + y'^2)_{K+\alpha'} = -Q\left[\frac{B(M^2 - Ch^2)}{M^2(B - C)} - 1\right]\frac{\mathrm{sn}^2 \varsigma i \,\mathrm{cn}^2 \varsigma i \,\mathrm{dn}^2 \varsigma i}{(\mathrm{sn}^2 \varsigma i - \mathrm{sn}^2 \alpha i)^2}.$$

et par suite on en conclut en réduisant

$$S_1 Q = -Q\frac{k'^2 AB}{(A - C)(B - C)}$$

ou

$$S_1 = -\frac{k'^2 AB}{(A - C)(B - C)}.$$

On aura donc enfin

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = Q\Bigg[&-\frac{k'^2 AB}{(A - C)(B - C)} \\ &+ \left[k'^2 + \frac{B[A(Ah^2 - M^2) + C(M^2 - Ch^2)]}{(A - C)(B - C)(Ah^2 - M^2)}\right]\mathrm{dn}^2 u - \mathrm{dn}^4 u\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Cette expression permet de voir que $x'^2 + y'^2$, qui n'est autre chose que le carré de la dérivée de l'arc, ne s'annule par aucune valeur réelle de u.

En effet l'équation du second degré en $\mathrm{dn}^2 u$ que l'on obtient en égalant à zéro le second membre de l'expression (65) a ses racines réelles, l'une comprise entre 0 et k'^2, l'autre entre 1 et $+\infty$.

On voit en effet que pour $\mathrm{dn}\, u = 0$ le second membre de (65) est négatif.

Pour $\mathrm{dn}^2 u = k'^2$ il est égal à :

$$\frac{Qk'^2 BC(M^2 - Ch^2)}{(B - C)(A - C)(Ah^2 - M^2)} > 0,$$

pour $\mathrm{dn}^2 u = 1$ il est égal à

$$Q\frac{AC(M^2 - Ch^2)}{(B - C)^2(Ah^2 - M^2)} > 0,$$

enfin pour $\mathrm{dn}^2 u = +\infty$ il est négatif.



Il y a donc bien une racine de l'équation en $\mathrm{dn}^2 u$ entre 0 et k'^2 (qui correspond à une valeur de u de la forme $\mathrm{K} + \mu i$, où μ est réel, positif et plus petit que K'), et une autre entre 1 et $+\infty$ (qui correspond à une valeur de u de la forme νi où ν est réel, positif et plus petit que K').

Passons maintenant au calcul de

$$y''x' - x''y';$$

pour cela remarquons que l'on a

$$\mathrm{DL}\frac{x'+iy'}{x'-iy'} = \frac{x''+iy''}{x'+iy'} - \frac{x''-iy''}{x'-iy'} = 2i\frac{y''x'-x''y'}{x'^2+y'^2}.$$

Mais

$$\mathrm{DL}\frac{x'+iy'}{x'-iy'} = \mathrm{DL}\frac{x'+iy'}{x+iy} - \mathrm{DL}\frac{x'-iy'}{x-iy} + \frac{x'+iy'}{x+iy} - \frac{x'-iy'}{x-iy}.$$

Donc enfin

$$(66)\left\{\begin{aligned} &2i(y''x'-x''y') \\ &= (x'^2+y'^2)\left[\mathrm{DL}\frac{x'+iy'}{x+iy} - \mathrm{DL}\frac{x'-iy'}{x-iy} + \frac{x'+iy'}{x+iy} - \frac{x'-iy'}{x-iy}\right].\end{aligned}\right.$$

Proposons-nous, en partant de cette formule, d'obtenir la décomposition en éléments simples de $2i(y''x'-x''y')$. Cette fonction qui est doublement périodique de première espèce avec les périodes 2K et $2i\mathrm{K}'$, ayant le seul infini $i\mathrm{K}'$, il nous faudra avoir la partie principale du développement du second membre pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$.

Posons pour cela

$$\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{i\mathrm{K}'} = -\frac{1}{\varepsilon} + a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2,$$

où l'on a en se reportant à la formule (62)

$$a_1 = \frac{\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,\beta i\,\mathrm{dn}^2\alpha i}{(\mathrm{sn}^2\beta i - \mathrm{sn}^2\alpha i)\,\mathrm{dn}\,\beta i},$$

$$a_2 = -\left[\frac{k^2\,\mathrm{cn}^2\beta i}{\mathrm{dn}^2\beta i} - \frac{1+k^2}{3}\right], \quad a_3 = -\frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}\,\beta i\,\mathrm{cn}\,\beta i}{\mathrm{dn}^3\beta i},$$

on aura par suite aussi

$$\left(\frac{x'-iy'}{x-iy}\right)_{iK'} = -\frac{1}{\varepsilon} - a_1 + a_2\varepsilon - a_3\varepsilon^2,$$

et on en déduit

$$DL\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{iK'} = \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} + a_2 + 2a_3\varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon} + a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} - a_1 - (a_1^2 + 2a_2)\varepsilon - (a_1^3 + 3a_1a_2 + 3a_3)\varepsilon^2,$$

puis

$$DL\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{iK'} - DL\left(\frac{x'-iy'}{x-iy}\right)_{iK'} = -2a_1 - 2(a_1^3 + 3a_1a_2 + 3a_3)\varepsilon^2.$$

Mais on a aussi

$$\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{iK'} - \left(\frac{x'-iy'}{x-iy}\right)_{iK'} = 2a_1 + 2a_3\varepsilon^2,$$

et par suite on déduira de la formule (66)

$$2i(y''x' - x''y')_{iK'} = (x'^2 + y'^2)_{iK'}\, 2(-a_1 - 3a_1a_2 - 2a_3)\varepsilon^2,$$

ou en définitive

$$(y''x' - x''y')_{iK'} = \frac{Q}{i}(a_1^3 + 3a_1a_2 + 2a_3)\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Mais en se rapportant aux valeurs, données plus haut, de a_1, a_2 et a_3, on aura

$$a_1^3 + 3a_1a_2 + 2a_3 = -\frac{\operatorname{sn}\beta i \operatorname{cn}\beta i}{\operatorname{dn}\beta i}\,\frac{M^2(A-B)C\,[(A+B+C)h^2 - 2M^2]}{(B-C)^2(Ah^2-M^2)^2}$$

$$= -iM\sqrt{\frac{ABC}{(B-C)(Ah^2-M^2)}}\,\frac{(A+B+C)h^2-2M^2}{(B-C)(Ah^2-M^2)}.$$

Donc en posant

$$P = QM \sqrt{\frac{ABC}{(B - C)(Ah^2 - M^2)} \cdot \frac{(A + B + C) h^2 - 2M^2}{(B - C)(Ah^2 - M^2)}}.$$

On a pour la partie principale cherchée :

$$-\frac{P}{\varepsilon^2} = PD_\varepsilon \varepsilon^{-1},$$

et par suite en désignant par S une constante

$$y''x' - x''y' = S + PD_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Mais à cause de la relation

$$D_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 u = \frac{J}{K} - 1 + \operatorname{dn}^2 u,$$

on aura S_1 désignant une nouvelle constante

$$y''x' - x''y' = S_1 + P \operatorname{dn}^2 u;$$

pour déterminer S_1 nous ferons $u = K + iK'$.

Pour cette valeur de u on a par la formule (65)

$$(x'^2 + y'^2)_{K+iK'} = - Q \frac{k'^2 AB}{(A - C)(B - C)};$$

on a ensuite

$$\frac{x' + iy'}{x + iy} = \lambda i + \frac{H_1'(u - \beta i)}{H_1(u - \beta i)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

et par suite

$$D \frac{x' + iy'}{x + iy} = D \frac{H_1'(u - \beta i)}{H_1(u - \beta i)} - D \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

ou à cause des relations

$$D\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=\frac{J}{K}-k^2\operatorname{sn}^2 u,$$

$$D\frac{H_1'(u-\beta i)}{H_1(u-\beta i)}=D\frac{\Theta'(u+K+iK'-\beta i)}{\Theta(u+K+iK'-\beta i)}=\frac{J}{K}-k^2\operatorname{sn}^2(u+K+iK'-\beta i),$$

$$D\frac{x'+iy'}{x+iy}=k^2\operatorname{sn}^2 u-k^2\operatorname{sn}^2(u+K+iK'-\beta i)$$

Donc pour $u=K+iK'$:

$$\left(DL\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{K+iK'}=\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta i}{\lambda i-\frac{\Theta'(\beta i)}{\Theta(\beta i)}},$$

c'est-à-dire à cause de la formule (64)

$$\left(DL\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{K+iK'}=\frac{\operatorname{sn}^2\beta i-\operatorname{sn}^2\alpha i}{\operatorname{sn}\beta i\operatorname{cn}\beta i}\operatorname{dn}\beta i.$$

On a d'ailleurs par la même formule (64)

$$\left(\frac{x'+iy'}{x+iy}\right)_{iK'+K}=\frac{\operatorname{sn}\beta i\operatorname{cn}\beta i\operatorname{dn}\beta i}{\operatorname{sn}^2\beta i-\operatorname{sn}^2\alpha i}$$

et par suite, en vertu de la formule (66), on aura pour la valeur de $2i(y''x'-x''y')$ pour $u=K+iK'$

$$-Q\frac{k'^2AB}{(B-C)(A-C)}\left[2\frac{\operatorname{sn}^2\beta i-\operatorname{sn}^2\alpha i}{\operatorname{sn}\beta i\operatorname{cn}\beta i}\operatorname{dn}\beta i+2\frac{\operatorname{sn}\beta i\operatorname{cn}\beta i\operatorname{dn}\beta i}{\operatorname{sn}^2\beta i-\operatorname{sn}^2\alpha i}\right]$$

$$=-2MQi\frac{(A+B-C)k'^2}{(B-C)(A-C)}\sqrt{\frac{ABC}{(B-C)(Ah^2-M^2)}}.$$

Donc

$$S_1=-\frac{MQ(A+B-C)k'^2}{(B-C)(A-C)}\sqrt{\frac{ABC}{(B-C)(Ah^2-M^2)}}$$

$$=-P\frac{k'^2(A+B-C)(Ah^2-M^2)}{(A-C)[(A+B+C)h^2-2M^2]},$$

et par suite en définitive

$$x'y'' - y'x'' = P\left[\mathrm{dn}^2 u - \frac{k'^2 (Ah^2 - M^2)(A + B - C)}{(A - C)\left[(A + B + C) h^2 - 2M^2\right]}\right].$$

Sous cette forme on peut voir facilement que $x'y'' - y'x''$ ne devient nul pour aucune valeur réelle de u, et que, par suite, le rayon de courbure de l'herpolodie n'est jamais infini.

1° La valeur de $\mathrm{dn}^2 u$ qui rend $x'y'' - x''y'$ nul est positive, car $\frac{Ah^2 - M^2}{A - C}$ est dans tous les cas positif et $(A + B + C) h^2 - 2M^2$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&(A + B + C)(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - 2(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)\\ &= Ap^2 (B + C - A) + Bq^2 (A + C - B) + Cr^2 (A + B - C).\end{aligned}$$

Mais d'après la définition même des moments d'inertie, on a, en désignant par m la masse du point du corps dont les coordonnées sont x, y, z,

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \qquad B = \Sigma m (x^2 + z^2), \qquad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

et par suite

$$B + C = \Sigma m (y^2 + z^2) + 2\Sigma m x^2 > A.$$

On obtiendrait d'une façon toute semblable

$$A + C > B, \qquad A + B > C.$$

On voit donc que dans tous les cas

$$(A + B + C) h^2 - 2M^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad A + B - C > 0.$$

La valeur de $\mathrm{dn}^2 u$ qui rend $x'y'' - y'x''$ nul est donc bien dans tous les cas positive.

2° Je dis que cette valeur est plus petite que k'^2.

Il suffit pour cela de faire voir que

$$\frac{(Ah^2 - M^2)(A + B - C)}{(A - C)\left[(A + B + C) h^2 - 2M^2\right]} < 1.$$

Mais l'on a

$$1-\frac{(Ah^2-M^2)(A+B-C)}{(A-C)[(A+B+C)h^2-2M^2]}=\frac{(M^2-Ch^2)(B+C-A)}{(A-C)[(A+B+C)h^2-2M^2]}>0;$$

car, d'après ce que nous venons de voir,

$$B+C-A>0 \quad \text{et} \quad (A+B+C)h^2-2M^2>0,$$

et, ainsi que nous l'avons vu en commençant, on a aussi

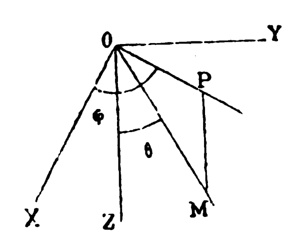
$$\frac{M^2-Ch^2}{A-C}>0.$$

Donc la valeur en question de $\mathrm{dn}^2 u$ est toujours positive et plus petite que k'^2; il en résulte que la valeur correspondante de u est imaginaire et de la forme $K+\gamma i$, γ étant réel positif et plus petit que K'.

On voit donc que les points stationnaires (point d'inflexion de l'herpolodie) sont toujours imaginaires.

II

MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE.



Soit O le point de suspension du pendule;

OZ la verticale dirigée vers le bas;

θ l'angle du pendule avec la verticale OZ;

φ l'angle du plan vertical contenant le pendule avec le plan ZOX, angle compté de O à 360° de gauche à droite par rapport à OZ;

v_0 la vitesse initiale du pendule;

θ_0 la valeur initiale de θ.

Nous supposerons de plus que θ_0 corresponde à un maximum de θ; ce qui, comme on sait, ne nuit pas à la généralité, et nous considérerons v_0 comme positif si la vitesse initiale est dirigée de gauche à droite, par rapport à OZ, et comme négatif dans le cas contraire. De cette façon v_0 aura le signe de $\frac{d\varphi}{dt}$ à l'instant initial.

On aura alors pour les équations du mouvement déduites du théorème des forces vives et de celui des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ, en désignant par l la longueur du pendule,

$$(1) \quad . \quad . \quad \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{v_0^2}{l^2},$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0\sin\theta_0}{l}.$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{v_0^2}{l^2}\left(1 - \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\right).$$

Posons

$$\frac{v_0^2}{2gl} = B^2, \quad \frac{g}{l} = A^2;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{v_0}{l} = AB\sqrt{2}.$$

Cette dernière équation supposant bien entendu que B a le signe de v_0.

Nous aurons alors les deux équations

$$(3) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2A^2}{\sin^2\theta}\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)(1 - \cos^2\theta) + B^2(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)\right],$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{AB\sqrt{2}\sin\theta_0}{\sin^2\theta}.$$

Posons maintenant

$$\cos\theta = z, \quad \cos\theta_0 = a.$$

Nous déduirons de l'équation (3) pour déterminer t la suivante :

$$(5) \quad . \; . \quad dt = \frac{dz}{A\sqrt{2}\sqrt{(z-a)(1 - B^2a - B^2z - z^2)}}.$$

Soient b et $-c$ les deux racines de l'équation

$$z^2 + B^2z - 1 + B^2a = 0.$$

Puisque nous avons supposé que θ_0 était un maximum pour θ, on a, comme on sait, et comme il est d'ailleurs facile de le vérifier,

$$0 < b < 1, \quad b^2 > a^2, \quad c > 1.$$

Des relations entre les coefficients et les racines

$$c - b = B^2, \quad 1 - B^2a = bc$$

on déduit

$$c = \frac{1 + ab}{a + b}, \quad B^2 = \frac{1 - b^2}{a + b},$$

et la dernière donne

$$B = \pm \sqrt{\frac{1-b^2}{a+b}},$$

le signe supérieur correspondant au cas où v_0 est positif et le signe inférieur au cas où il est négatif.

On aura alors pour les équations du mouvement déduites de (5) et (4)

$$(6) \quad . \quad . \; dt = \frac{dz}{A\sqrt{2}\sqrt{(z-a)(b-z)\left(z+\frac{1+ab}{a+b}\right)}},$$

$$(7) \quad . \quad . \; \frac{d\varphi}{dt} = \pm A \sqrt{\frac{2(1-a^2)(1-b^2)}{a+b}} \frac{1}{1-z^2}.$$

Posons maintenant

$$z = b\,\mathrm{cn}^2 u + a\,\mathrm{sn}^2 u, \qquad k^2 = \frac{b^2-a^2}{1+2ab+b^2};$$

d'où l'on déduit

$$k'^2 = \frac{1+2ab+a^2}{1+2ab+b^2}.$$

Les valeurs de k^2 et k'^2 seront toutes deux positives, et par suite aussi plus petites que un.

On aura alors

$$dt = \frac{du}{A}\sqrt{\frac{2(a+b)}{1+2ab+b^2}},$$

et en prenant $t=0$ par $u=0$

$$t = \frac{u}{A}\sqrt{\frac{2(a+b)}{1+2ab+b^2}}.$$

On a ensuite

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{1+2ab+b^2}} \frac{\pm 2}{[1+b-(b-a)\mathrm{sn}^2 u][1-b+(b-a)\mathrm{sn}^2 u]}.$$

Mais en décomposant la fonction

$$\frac{\pm 2}{[1 + b - (b - a)\,\mathrm{sn}^2 u][1 - b + (b - a)\,\mathrm{sn}^2 u]},$$

qui est doublement périodique de première espèce avec les périodes 2K et $2i$K, en éléments simples, par le théorème de M. Hermite, on aura

$$\frac{\pm 2}{[1+b-(b-a)\mathrm{sn}^2 u][1-b+(b-a)\mathrm{sn}^2 u]} = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{1+2ab+b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}}$$

$$\left\{2\left[\frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)}\right] + \frac{H'(u-\alpha i)}{H(u-\alpha i)} - \frac{H'(u+\alpha i)}{H(u+\alpha i)} + \frac{\Theta_1'(u+\beta i)}{\Theta_1(u+\beta i)} - \frac{\Theta_1'(u-\beta i)}{\Theta_1(u-\beta i)}\right\},$$

α et β étant des quantités réelles plus petites que K$'$ en valeur absolue et définies par les équations

$$\mathrm{sn}\,\alpha i = \pm i\sqrt{\frac{1-b}{b-a}}, \quad \mathrm{sn}\,(K + iK' - \beta i) = \sqrt{\frac{1+b}{b-a}},$$

α et β étant tous deux positifs si $v_0 > 0$ et tous deux négatifs si $v_0 < 0$.

β sera réel parce que l'on a ainsi qu'on le voit facilement

$$0 < \frac{1+b}{b-a} < \frac{1}{k^2}.$$

On déduit d'ailleurs des valeurs précédentes de sn αi et sn(K + iK$'$ — βi)

$$\mathrm{cn}\,\alpha i = \sqrt{\frac{1-a}{b-a}}, \quad \mathrm{dn}\,\alpha i = \sqrt{\frac{(1+a)(1+b)}{1+2ab+b^2}},$$

$$\mathrm{cn}\,(K + iK' - \beta i) = -i\sqrt{\frac{1+a}{b-a}},$$

$$\mathrm{dn}\,(K + iK' - \beta i) = \pm\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1+2ab+b^2}},$$

et aussi

$$\operatorname{sn}\beta i = \pm i\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(b+a)}},\quad \operatorname{cn}\beta i = \sqrt{\frac{1+2ab+a^2}{(1+a)(b+a)}},$$

$$\operatorname{dn}\beta i = \sqrt{\frac{(1+2ab+a^2)(1+b)}{(1+2ab+b^2)(1+a)}}.$$

De la décomposition en éléments simples que nous venons d'effectuer on conclut

$$d\varphi = \frac{1}{i}\left[\frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)}\right] du$$

$$+\frac{1}{2i}\left[\frac{H'(u-\alpha i)}{H(u-\alpha i)} - \frac{H'(u+\alpha i)}{H(u+\alpha i)} + \frac{\Theta_1'(u+\beta i)}{\Theta_1(u+\beta i)} - \frac{\Theta_1'(u-\beta i)}{\Theta_1(u-\beta i)}\right] du.$$

Par suite, en supposant $\varphi = \varphi_0$ pour $u = 0$ et posant

$$\lambda i = \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda u + \frac{1}{2i}\,L\left[-\frac{H(u-\alpha i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{H(u+\alpha i)\,\Theta_1(u-\beta i)}\right].$$

Nous allons maintenant chercher l'expression des coordonnées horizontales du pendule.

Proposons-nous, pour cela, de trouver l'expression de

$$x + iy = l\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) = l\sin\theta e^{\varphi i},$$

on aura en remplaçant φ et θ par leurs valeurs

$$x + iy = le^{\varphi_0 i + \lambda u i}\sqrt{-\frac{H(u-\alpha i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{H(u+\alpha i)\,\Theta_1(u-\beta i)}(1-z^2)}.$$

Mais l'on a

$$1 - z^2 = (b-a)^2\left[\operatorname{sn}^2(K + iK' - \beta i) - \operatorname{sn}^2 u\right](\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha i).$$

Or on a P, Q et R désignant des constantes

$$\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha i = \mathrm{P}\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\,\mathrm{H}(u+\alpha i)}{\Theta^2(u)},$$

$$\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-\beta i) = \mathrm{Q}\,\frac{\Theta_1(u-\beta i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{\Theta^2(u)},$$

et par suite

$$1-z^2 = \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\,\mathrm{H}(u+\alpha i)\,\Theta_1(u-\beta i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{\Theta^4(u)};$$

en faisant $u=0$, ce qui donne $z=b$, on a

$$\mathrm{R} = -\frac{(1-b^2)\,\Theta^4(0)}{\mathrm{H}^2(\alpha i)\,\Theta_1^2(\beta i)},$$

et par suite

$$\sqrt{-\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\Theta_1(u+\beta i)}{\mathrm{H}(u+\alpha i)\Theta_1(u-\beta i)}(1-z^2)} = -\frac{\sqrt{1-b^2}\,\Theta^2(0)}{\mathrm{H}(\alpha i)\Theta_1(\beta i)}\,\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\Theta_1(u+\beta i)}{\Theta^2(u)}.$$

Nous avons pris le signe — en extrayant la racine carrée parce que nous supposons que pour $u=0$, $\sqrt{1-z^2}$ est égal à $+\sqrt{1-b^2}$.

On aura donc pour l'expression cherchée de $x+iy$

$$x+iy = -\,l e^{\varphi_0 i + \lambda u i}\,\frac{\sqrt{1-b^2}\,\Theta^2(0)}{\mathrm{H}(\alpha i)\,\Theta_1(\beta i)}\,\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{\Theta^2(u)}.$$

En changeant i en $-i$ nous aurions l'expression de $x-iy$.

Supposons maintenant que nous rapportions la courbe décrite par la projection horizontale à des axes mobiles dans le plan des xy autour du point 0 et faisant un angle χ, variable, avec les premiers.

On aura, x_1 et y_1 étant les nouvelles coordonnées,

$$x_1 + iy_1 = (x+iy)\,e^{-\chi i}$$

et par suite, en vertu de la relation trouvée plus haut,

$$x_1 + iy_1 = -\frac{l\sqrt{1-b^2}\,\Theta^2(0)}{\mathrm{H}(\alpha i)\,\Theta_1(\beta i)}\,\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\,\Theta_1(u+\beta i)\,e^{(\varphi_0+\lambda u-\chi)i}}{\Theta^2(u)}.$$

Si l'on prend

$$\chi = \varphi_0 + \lambda u,$$

on aura

$$x_1 + iy_1 = -\frac{l\sqrt{1-b^2}\,\Theta^2(0)}{\mathrm{H}(\alpha i)\,\Theta_1(\beta i)}\,\frac{\mathrm{H}(u-\alpha i)\,\Theta_1(u+\beta i)}{\Theta^2(u)}.$$

On conclut de là que, par rapport aux axes mobiles qui font avec les axes fixes un angle $\chi = \varphi_0 + \lambda u$, le pendule décrit une courbe fermée, car en changeant u en $u + 4\mathrm{K}$, $x_1 + iy_1$ ne change pas.

Les axes mobiles tournent par rapport aux axes fixes avec une vitesse angulaire constante

$$\frac{d\chi}{dt} = \lambda\frac{du}{dt} = \lambda \mathrm{A}\sqrt{\frac{1+2ab+b^2}{2(a+b)}}.$$

Les axes de la courbe mobile correspondent aux valeurs $u = 0$ et $u = \mathrm{K}$, ils font donc entre eux un angle de 90°.

Nous allons faire voir maintenant que les axes mobiles tournent par rapport aux axes fixes dans le sens du mouvement. Il suffit pour cela de faire voir que $\frac{d\chi}{dt}$ a le signe de v_0, ou, ce qui revient au même, que si α et β sont positifs il en est de même de λ, puisque si v_0 change de signe il en est de même de α et β et par suite aussi de λ et $\frac{d\chi}{dt}$.

Nous avons

$$\lambda i = \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{\mathrm{H}_1'(\beta i)}{\mathrm{H}_1(\beta i)},$$

ou, à cause de la relation

$$\frac{\mathrm{H}_1'(\beta i)}{\mathrm{H}_1(\beta i)} = -\frac{\Theta'(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-\beta i)}{\Theta(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-\beta i)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}},$$

$$\lambda i = \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} + \frac{\Theta'(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-\beta i)}{\Theta(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-\beta i)} + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Mais à cause de la formule connue

$$\int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{J}{K} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

on pourra écrire

$$\lambda i = \frac{J}{K}(\alpha i + K + iK' - \beta i) - J - iJ'$$

$$- \int_0^{\alpha i} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du + \int_{K+iK'-\beta i}^{K+iK'} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du + \frac{i\pi}{2K},$$

formules où comme on sait

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du, \quad iJ' = \int_K^{K+iK'} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du.$$

Mais à cause de la relation connue

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

cette valeur deviendra

$$\lambda i = \frac{J}{K}(\alpha - \beta) i - \int_0^{\alpha i} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du + \int_{K+iK'-\beta i}^{K+iK'} k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du$$

Mais en posant dans la première intégrale $u = iz$ et dans la seconde $u = K + iK' - iz$ et tenant compte de la relation

$$\operatorname{sn}(K + iK' - iz) = \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} iz}{\operatorname{cn} iz},$$

on aura

$$\lambda = \frac{J}{K}(\alpha - \beta) - \int_0^{\alpha} k^2 \operatorname{sn}^2 iz dz + \int_0^{\beta} \frac{\operatorname{dn}^2 iz}{\operatorname{cn}^2 iz} dz.$$

On a maintenant au moyen d'une transformation du premier degré bien connue (*) :

$$\operatorname{sn}(iz, k) = i\frac{\operatorname{sn}(z, k')}{\operatorname{cn}(z, k')},$$

$$\operatorname{cn}(iz, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(z, k')},$$

$$\operatorname{dn}(iz, k) = \frac{\operatorname{dn}(z, k')}{\operatorname{cn}(z, k')},$$

et par suite la valeur de λ pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\lambda = \frac{J}{K}(\alpha - \beta) + \int_0^\alpha k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(z, k')}{\operatorname{cn}^2(z, k')} dz + \int_0^\beta \operatorname{dn}^2(z, k')\, dz.$$

Mais comme

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du,$$

et que u variant de 0 à K $\operatorname{sn}^2 u$ est positif et plus petit que 1, on a

$$J < \int_0^K k^2\, du = k^2 K,$$

c'est-à-dire

$$\frac{J}{K} < k^2.$$

D'autre part, z variant de 0 à β qui est réel et positif, on a

$$\operatorname{dn}(z, k') > k,$$

et par suite

$$\int_0^\beta \operatorname{dn}^2(z, k')\, dz > k^2 \int_0^\beta dz = k^2\beta.$$

Donc

$$\int_0^\beta \operatorname{dn}^2(z, k') - \frac{J}{K}\beta > 0.$$

(*) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 372.

Comme d'ailleurs on suppose α positif,

$$\frac{J}{K}\alpha \quad \text{et} \quad \int_0^\alpha k^2 \frac{\operatorname{sn}^2(z,k')}{\operatorname{cn}^2(z,k')} dz$$

sont évidemment aussi tous deux positifs; il s'ensuit que λ a toujours le signe de α et β.

On conclut de là — cette propriété du mouvement démontrée par M. Puiseux — que l'angle formé par deux rayons vecteurs maximum et minimum consécutifs de la courbe fixe est toujours plus grand que $\frac{\pi}{2}$; il est en effet égal à $\frac{\pi}{2}$ augmenté de la valeur absolue de λK.

Pour terminer, nous allons nous proposer de donner pour le cas où le pendule s'écarte peu de la verticale le résultat obtenu par M. Resal dans son *Traité de mécanique générale.*

Soit θ_0 la valeur maxima de θ, θ_1 sa valeur minima.

On aura

$$a = \cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}, \quad b = \cos\theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2},$$

et par suite, en supposant α et β positifs,

$$\operatorname{sn}\alpha i = \frac{i\theta_1}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta_1^2}}, \quad \operatorname{sn}\beta i = \frac{i\theta_0\theta_1}{4},$$

$$\operatorname{cn}\alpha i = \frac{\theta_0}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta_1^2}}, \quad k^2 = \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{4};$$

k^2 ayant une valeur très petite, on pourra dans ce qui va suivre remplacer les fonctions elliptiques par les fonctions circulaires.

On voit de plus que α a une valeur finie et que β est très petit.

Pour calculer la valeur de λ dans le cas qui nous occupe nous allons d'abord la mettre sous une forme un peu différente de celle dont nous nous sommes servi jusqu'à présent.

En prenant la dérivée logarithmique de l'expression

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

on a

$$\frac{H_1'(u)}{H_1(u)} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

On pourra donc écrire

$$\lambda i = \frac{\operatorname{sn}\beta i \operatorname{dn}\beta i}{\operatorname{cn}\beta i} + \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{\Theta'(\beta i)}{\Theta(\beta i)},$$

c'est-à-dire en tenant compte des valeurs données de sn βi, cn βi, dn βi

$$\lambda i = i\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1+b)}{(1+2ab+b^2)(1+a)}} + \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} - \frac{\Theta'(\beta i)}{\Theta(\beta i)};$$

on en déduit au moyen d'une formule déjà employée plusieurs fois

$$\lambda = \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1+b)}{(1+2ab+b^2)(1+a)}} + \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}(\alpha-\beta) - \frac{1}{i}\int_{\beta i}^{\alpha i} k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du.$$

Or ici on a, en s'arrêtant au même degré d'approximation que plus haut,

$$\mathrm{K} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right),$$

$$\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k^2 \sin^2 u\, du = \frac{k^2\pi}{4},$$

par suite

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = \frac{k^2}{2},$$

$$\lambda = \frac{\theta_1\theta_0}{4} + \frac{k^2}{2}(\alpha-\beta) - \frac{1}{i}\int_{\beta i}^{\alpha i} k^2 \sin^2 u\, du,$$

ou

$$\lambda = \frac{\theta_1\theta_0}{4} + \frac{k^2}{2i}(\sin\alpha i\cos\alpha i - \sin\beta i\cos\beta i) = \frac{\theta_1\theta_0}{4} + \frac{\theta_0\theta_1}{8}.$$

Donc enfin

$$\lambda = \frac{3\theta_1\theta_0}{8},$$

et par suite

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{3\theta_1\theta_0}{8}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On a aussi pour le temps d'une oscillation complète T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_1^2}{4}}{1 - \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_1^2}{2}}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{16}\right),$$

c'est-à-dire

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{16}\right) \left(1 + \frac{\theta_1^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou enfin

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{16}\right).$$

Quant à la courbe mobile, son équation se déduit de la relation

$$x_1 + iy_1 = -\frac{l\sqrt{1 - b^2\Theta^2(0)}}{H(\alpha i)\,\Theta_1(\beta i)} \frac{H(u - \alpha i)\,\Theta_1(u + \beta i)}{\Theta^2(u)}.$$

Mais lorsque le module tend vers zéro le développement

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots$$

nous fait voir que $\Theta(u)$ tend vers l'unité, car

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

a pour limite zéro, puisque K' devient infini pour $k = 0$.

Par suite des formules

$$H(x) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,x\,\Theta(x),$$

$$H_1(x) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,x\,\Theta(x),$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\,x\,\Theta(x).$$

On déduit pour le cas où le module tend vers zéro

$$\lim \frac{\mathrm{H}(x)}{\sqrt{k}} = \sin x,$$

$$\lim \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\sqrt{k}} = \cos x,$$

$$\lim \Theta_1(x) = 1.$$

On aura donc en s'arrêtant toujours au même degré d'approximation

$$x_1 + iy_1 = -l\theta_1 \frac{\sin(u - \alpha i)}{\sin \alpha i} = -l\theta_1 \frac{\cos \alpha i}{\sin \alpha i} \sin u + l\theta_1 \cos u,$$

c'est-à-dire en supposant, ainsi que nous l'avons dit, α positif,

$$x_1 + iy_1 = il\theta_0 \sin u + l\theta_1 \cos u\,;$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = l\theta_1 \cos u, \quad y_1 = l\theta_0 \sin u.$$

L'équation de la courbe mobile est donc

$$\frac{x_1^2}{l^2\theta_1^2} + \frac{y_1^2}{l^2\theta_0^2} = 1,$$

équation d'une ellipse dont les axes sont

$$2l\theta_1 \quad \text{et} \quad 2l\theta_0,$$

et, d'après ce que nous avons vu, les axes de cette ellipse tournent avec une vitesse

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{3}{8}\theta_1\theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Nous retrouvons bien les résultats donnés par M. Résal dans son *Traité de mécanique générale* pour le cas où le pendule s'écarte peu de la verticale.

SUR
UNE LACUNE QUI SEMBLE EXISTER
AU DÉBUT DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

M. le major DE TILLY

Membre de la Société scientifique de Bruxelles.

---

1. La théorie de la mesure exacte des objets à trois dimensions, comprenant l'étude de la position relative de leurs diverses parties et la détermination de leurs éléments principaux (autant que possible avec la règle et le compas), me semble devoir constituer un complément, peut-être même une introduction, sinon indispensable, du moins très utile, des cours de géométrie descriptive.

Cette dernière science doit, comme son nom l'indique, décrire les objets; mais pourquoi ne décrirait-elle que des objets idéaux, au lieu des objets réels?

Je m'explique en prenant un cas à la fois simple et probant : l'épure de l'ellipsoïde de révolution. Celui qu'on représente est un ellipsoïde idéal ou en projet, c'est-à-dire dont on donne les axes. Pourquoi ne représente-t-on pas un ellipsoïde donné, existant, matériel? Je l'ignore, mais c'est peut-être parce qu'il faudrait commencer par mesurer les axes, et que cela embarrasse.

Pour la sphère, le cas est prévu. Avant même d'apprendre la géométrie descriptive, on a résolu ce problème élémentaire :

Étant donnée une sphère solide, construire son rayon.

Mais pour un ellipsoïde, et en général pour un corps quelconque donné matériellement, comment faut-il exécuter son dessin

sans faire d'*hypothèses* (ou en faisant le moins d'hypothèses possible) sur ses dimensions ou sur ses formes, mais en appliquant les instruments sur les solides aussi bien que sur le plan, comme on le fait pour le problème simple que je viens de rappeler?

J'ai traité cette question, d'abord dans une instruction (autographiée pour l'École militaire) sur les levers du matériel et sur le dessin géométrique; ensuite, en ce qui concerne spécialement les surfaces du second degré et leurs combinaisons, dans plusieurs articles de la *Nouvelle correspondance mathématique*.

J'ai montré, le premier, je pense (*), que la détermination géométrique complète, exécutée dans les éléments pour la sphère, peut aussi s'exécuter rigoureusement, avec la règle et le compas, pour le cylindre et le cône du second degré, l'ellipsoïde et l'hyperboloïde de révolution.

3. Mes réflexions sur les bases de la géométrie descriptive étaient déjà anciennes, mais elles me sont revenues à l'esprit en lisant les premières pages du nouveau cours de géométrie descriptive de l'École militaire, par le capitaine du génie Chomé.

L'auteur explique, d'après Monge, pourquoi il est plus avantageux de déterminer un point par ses distances à trois plans (ce qui est, au fond, le procédé de la géométrie descriptive) que par ses distances à trois points. Ce serait l'occasion, me semble-t-il, de faire observer que si cet avantage existe en général, c'est-à-dire pour toutes les constructions intermédiaires entre les données et les résultats, il en est autrement lorsqu'il s'agit de transporter les données, de l'objet à trois dimensions sur le plan de l'épure et aussi de transporter, le cas échéant, les résultats de l'épure sur l'objet à trois dimensions.

Alors il faut nécessairement déterminer chaque point par ses distances à trois autres points, parce que la distance entre deux points est la seule qui se mesure directement sur un solide, au moyen des instruments usuels.

En admettant cette idée, on donne au mot *descriptive* sa signi-

---

(*) Voir, toutefois, ce qui est dit plus loin, en note, à propos du principe II.

fication complète, sans être obligé de supposer que toute application de cette science commence et finisse par un tâtonnement, ou par un à peu près.

2. Pour transporter les données de l'objet à trois dimensions sur le plan de l'épure, on se servira des principes suivants :

I. Un point quelconque O d'une figure peut être projeté sur le plan déterminé par trois points A, B, C de cette figure, en décrivant, dans le plan ABC (ou dans tout autre plan où les points A, B, C seront reportés avec leurs distances mutuelles), trois circonférences ayant respectivement pour centres ces trois points et pour rayons les distances AO, BO, CO, mesurées dans l'espace; le point unique, intersection des trois cordes, communes à ces trois circonférences considérées deux à deux, sera la projection du point O sur le plan ABC (*).

Par deux points du plan de projection, A et B par exemple, on peut faire passer un second plan, qui sera déterminé, dans l'espace, par A, B et un troisième point arbitraire D.

Nous pourrons supposer alors que l'on prenne les deux plans dont nous venons de parler comme plans de projection. On les représentera dans le dessin, rabattus l'un dans le prolongement de l'autre, AB formant la ligne de terre, et l'on exécutera géométriquement comme ci-dessus, la représentation de l'objet par autant de points que l'on voudra, sur les deux plans, si cette double représentation est jugée utile.

On pourra construire l'angle des deux plans de projection, au moyen d'un simple triangle rectangle, en observant que le point D, situé dans le second plan, peut être projeté sur le premier, d'après la méthode indiquée.

Si l'on veut que les plans de projection soient perpendiculaires entre eux, ou aussi pour pouvoir utiliser les connaissances que

(*) On le voit immédiatement par l'intersection de trois sphères, mais on peut aussi recourir aux rabattements, comme on le fait, dans les traités, pour construire le quatrième sommet d'un tétraèdre, dont on donne la base et les longueurs des arêtes. Seulement, il résulte de notre étude que ce problème, au lieu de figurer parmi les applications, devrait logiquement prendre place au début de la géométrie descriptive.

l'on posséderait sur la nature géométrique de l'objet à décrire, il faudra employer un second principe.

II. Étant donnée une figure à trois dimensions, on peut, en général, trouver sur cette figure autant de points que l'on veut, appartenant à un même plan, en décrivant de deux points quelconques, comme centres, deux courbes sphériques de même rayon, se coupant sur la surface donnée, puis répétant la construction avec autant de rayons différents que l'on voudra. Tous les points d'intersection obtenus appartiendront à un même plan. Il suffira d'en construire trois pour déterminer le plan; mais il sera souvent avantageux d'en construire davantage, par exemple cinq, lorsque le plan coupera la surface donnée suivant une section conique (*).

Pour obtenir, sur l'objet, deux plans de projection perpendiculaires entre eux, on déduira, d'un premier couple de points AB, un second couple A'B', tel que AB et A'B' soient perpendiculaires entre elles (en direction). Alors les plans respectivement normaux au milieu de AB et au milieu de A'B' (plans obtenus comme ci-dessus, principe II), seront deux plans perpendiculaires représentés sur l'objet. A' et B' sont dans l'un des plans de projection. La ligne de terre passe par le milieu de A'B' et est perpendiculaire à cette droite. On peut, d'ailleurs, la construire dans chaque plan de projection séparément, en y projetant deux points de l'autre, puis mettre les deux projections en concordance.

4. La construction des projections sur les deux plans choisis se fera au besoin par points, mais on pourra la simplifier et la compléter au moyen des indications que l'on possédera sur la nature géométrique de l'objet à représenter, ou de quelques-unes de ses parties.

L'objet peut comprendre, d'abord, des droites, des cercles, des plans, etc.

Examinons un certain nombre de cas plus compliqués, en

(*) Dans l'intervalle entre la remise de cette note et la correction des épreuves, M. Mansion m'a fait observer que le principe II a été employé par Pappus, pour trouver le diamètre d'un cylindre de révolution, étant donnée une partie de la surface.

cherchant à déterminer les éléments principaux des figures dans l'espace, ce qui en donnera évidemment une représentation plus complète et plus utile que si l'on ne projetait (d'après les principes précédents) que des points isolés, même en grand nombre.

5. Étant donnée une sphère solide, trouver son rayon (*). Cherchant, d'après le principe II, trois points dans un même plan, il se trouve que ce plan est celui d'un grand cercle; donc le rayon s'obtient immédiatement. C'est à peu près la solution du *Traité de géométrie* de M. Catalan.

6. Étant donné un cylindre dont la base est une courbe du second ordre, construire une génératrice passant par un point pris sur la surface.

Construisons (II) les projections A', B', C', D', E' de cinq points A, B, C, D, E du cylindre, situés dans un plan. Sur ce même plan projetons (I) cinq autres points du cylindre, situés dans un autre plan.

Cherchons, avec la règle et le compas, les centres O, O' des deux sections (ou les sommets, s'il s'agit de paraboles).

Soit M' la projection du point M, donné sur le cylindre.

Par M', menons une parallèle à la droite OO', et déterminons, avec la règle et le compas, l'intersection N' de cette parallèle avec la section conique A'B'C'D'E'.

Rapportons N' en N, au moyen de ses distances aux points A', B', C'; MN sera la génératrice demandée.

7. Étant donné un tronc de cône dont les bases, situées dans des plans parallèles, sont des courbes du second ordre, construire la génératrice qui passe par un point M, pris sur la surface conique.

Construisons, dans un plan, l'une des courbes de base, par cinq points; puis projetons (I) cinq points de l'autre, sur le plan de la première.

Déterminant, avec la règle et le compas, les centres de ces

(*) La solution de ce problème (comme je l'ai déjà fait observer) se trouve dans tous les traités de géométrie, mais presque toujours, elle est trop particulière au cas de la sphère, et non susceptible de généralisation.

sections projetées (ou les sommets, si ce sont des paraboles), et joignant par une droite ces points homologues, on aura un premier lieu sur lequel se trouve la projection du sommet du cône.

Pour en avoir un second, on mènera par les centres (ou sommets) projetés, deux parallèles quelconques; on déterminera leurs intersections avec les courbes de base, projetées, et l'on joindra ces intersections.

Ayant ainsi le sommet projeté, on le joindra par une droite, à la projection M' du point donné; on déterminera l'intersection N' de cette droite avec la première base construite; on reportera N' en N sur le cône : MN sera la génératrice demandée.

Si les deux droites, lieux géométriques du sommet projeté, se coupaient en dehors du dessin, la droite qui joint ce sommet projeté au point M' pourrait cependant être construite par une méthode bien connue.

Dans ces trois problèmes simples (5, 6, 7,) j'ai opéré de manière à n'employer qu'un seul plan de projection; c'est d'ailleurs la cause unique des restrictions qui subsistent encore dans les énoncés; mais, quelque compliqué que soit le problème, s'il est susceptible d'une solution, celle-ci s'obtiendra toujours par l'emploi des deux plans de projection, en opérant comme dans les exemples suivants.

8. *Problème auxiliaire.* Reporter, par autant de points qu'on voudra, sur la figure dans l'espace, un plan représenté dans l'épure.

Construisons, sur la figure dans l'espace, trois sections planes, chacune par un nombre suffisant de points (cinq, si ce sont des coniques, comme nous le supposerons) (*), puis représentons dans l'épure les plans de ces sections, ainsi que les droites suivant lesquelles ces derniers plans sont coupés par le plan donné.

Construisons aussi, avec la règle et le compas, les intersections respectives de ces trois droites avec les trois coniques dans les plans desquelles elles sont situées.

Enfin, reportons ces six points, ou seulement cinq d'entre eux,

---

(*) Dans les autres cas, la construction avec la règle et le compas serait, généralement, impossible.

sur la figure dans l'espace, chacun au moyen de ses distances aux autres points de la même conique, déjà représentés.

9. Étant donnée une portion quelconque d'une surface conique (ou cylindrique) du second ordre, mener une génératrice par un point donné et représenter complètement la surface.

On construira une conique sur la surface (II); on construira son plan dans l'épure (I); par un point quelconque pris sur la surface, et reporté sur l'épure, on mènera, dans cette dernière, un plan parallèle au précédent ; on reportera ce plan sur la surface (8). On se trouvera alors dans les mêmes conditions qu'au n° 7.

On pourra représenter complètement les surfaces données, par exemple le cylindre par sa section droite, le cône par une section quelconque et le sommet.

10. Étant donné un ellipsoïde de révolution solide, trouver la grandeur de ses axes et la position de ses sommets.

Déterminons, comme ci-dessus, deux sections parallèles, tant sur l'épure que sur la surface; joignons leurs centres dans l'épure; par la droite obtenue, menons un plan, que nous reporterons sur la surface (8) par cinq points; cherchons, dans l'épure, les intersections de la droite avec la section conique des cinq points. Ces deux points sont les extrémités d'un diamètre.

Prenons, dans l'épure, le milieu de leur distance. Ce sera le centre.

Imaginons une sphère concentrique à l'ellipsoïde et passant par un point pris sur sa surface.

Nous pourrons, dans l'épure, déterminer neuf points de l'intersection de cette sphère avec l'ellipsoïde, par l'intermédiaire de plans sécants, passant par le centre et reportés sur la surface (8); car les points de rencontre d'une section conique déterminée, avec une circonférence concentrique, s'obtiennent avec la règle et le compas.

Des neuf points obtenus, cinq au moins seront dans un même plan. Menant par le centre, dans l'épure, une perpendiculaire à ce plan, puis déterminant ses intersections avec l'ellipsoïde, par l'intermédiaire d'un plan sécant, on connaîtra l'axe de révolution et ses deux sommets, que l'on reportera sur l'ellipsoïde.

On achèvera en menant, par le centre, un plan perpendiculaire à l'axe obtenu, et en cherchant le rayon de la section.

11. Étant donnée une portion quelconque d'un hyperboloïde de révolution, à une nappe, trouver la grandeur de ses axes, la position du cercle de gorge, et construire les deux génératrices passant par un point donné.

On opérera comme dans le problème précédent pour déterminer les axes, la position du cercle de gorge sur l'épure, et reporter sur la surface autant de points que l'on voudra de ce cercle.

Projetant sur son plan le point donné; menant, par cette projection, deux tangentes au cercle, et joignant les points de contact au point donné, on aura les deux génératrices demandées, sur l'épure.

On reportera sur la surface un point quelconque de chacune de ces génératrices, assez voisin du point donné pour qu'il tombe dans la portion de surface existante.

12. Pour un ellipsoïde à trois axes inégaux (et à plus forte raison pour des surfaces plus compliquées), je ne vois pas le moyen d'opérer en n'employant que la règle et le compas; mais on pourra toujours, par un calcul aussi précis que l'on voudra, fixer la position des axes et les dessiner.

Parmi tous les moyens possibles, je signalerai le suivant.

On construira trois diamètres conjugués, et aussi trois diamètres rectangulaires entre eux, aussi facilement que si l'ellipsoïde était de révolution (*).

Dès lors, les longueurs a, b, c, des demi-axes, seront liées entre elles par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} abc &= m \\ a^2 + b^2 + c^2 &= n \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

m, n, p étant des quantités construites.

(*) La différence n'apparait que quand on cherche l'intersection de l'ellipsoïde avec une sphère concentrique.

On pourra résoudre ces équations aussi approximativement que l'on voudra. Il suffira, évidemment, de connaître l'une des trois valeurs *a*, *b*, ou *c*, pour pouvoir en déduire les deux autres en n'employant plus que la règle et le compas; si l'on veut, non seulement obtenir les longueurs des axes, mais en outre construire ceux-ci à leur place dans le dessin, c'est l'axe moyen *b* qu'il faut calculer de préférence (*).

En effet, la sphère de rayon *b* coupe l'ellipsoïde suivant deux cercles, dont on pourra construire autant de points que l'on voudra, par l'intermédiaire de plans sécants, comme nous l'avons fait pour l'ellipsoïde de révolution.

On pourra donc construire les plans cycliques de l'ellipsoïde et, les plans bissecteurs de leurs dièdres étant les plans des axes, le reste s'achèvera comme si l'ellipsoïde était de révolution.

13. Il serait très intéressant d'examiner à fond s'il n'existe aucun moyen de faire toute la construction avec la règle et le compas. Il ne suffit pas, pour établir le contraire, d'observer que les équations (1) ci-dessus ont pour résultante une équation du troisième degré, car, outre les constructions que l'on peut faire dans le plan de l'épure sur les données *m*, *n*, *p*, on dispose toujours de l'ellipsoïde solide, sur lequel on pourrait imaginer une construction plus ou moins ingénieuse, conduisant à des données nouvelles. Le doute peut donc subsister dans le cas de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et à plus forte raison pour d'autres surfaces plus compliquées, mais les surfaces du second ordre, de révolution, se laissent décrire complètement avec la règle et le compas.

14. Quelquefois, dans les surfaces du second ordre, la nature du problème rendra inutile la connaissance des axes, et alors on pourra résoudre avec la règle et le compas, même quand ces surfaces ne seront pas de révolution. En voici un exemple :

(*) Au premier abord, il semblerait encore plus avantageux de résoudre par rapport à *a* ou à *c*, mais la sphère ayant *a* ou *c* pour rayon serait tangente à l'ellipsoïde et la détermination géométrique des points de contact (dans l'épure) serait impossible.

Étant donnés deux solides formant un seul système invariable et limités par des surfaces du second ordre, à centres; construire, avec la règle et le compas, la distance des centres de ces surfaces (*).

Tout revient, évidemment, à construire les deux surfaces dans une même épure; or, les principes posés précédemment n'impliquent nullement que les points déterminant les plans de projection soient choisis sur la surface même à représenter : il suffit qu'ils y soient reliés d'une manière invariable. On pourra donc, dans une même épure, construire les deux centres, comme aux nos 10 et 11, puis l'on mesurera leur distance.

15. Les constructions dont nous avons parlé dans les numéros précédents pourront servir, non seulement à représenter les objets, ou à résoudre sur eux certains problèmes, mais aussi à reporter les résultats sur la figure dans l'espace. Ici encore des circonstances particulières peuvent faciliter le report des points, mais le seul procédé général consiste à mesurer leurs distances à des points déjà reportés et à décrire des courbes sphériques sur la figure dans l'espace. L'emploi de trois courbes sphériques constituera le cas ordinaire; deux suffiront dans le cas exceptionnel où ces courbes n'auront qu'un point d'intersection sur l'objet à représenter et où il n'y aura, d'ailleurs, aucun doute sur la correspondance de ce point avec celui du dessin; enfin il faudra quatre courbes dans le cas, également exceptionnel, où les points d'intersection des trois sphères employées d'abord appartiendraient tous les deux à l'objet à représenter.

(*) Ce problème est proposé, comme application, dans certains traités de géométrie, mais seulement pour deux sphères.

NOTICE LITHOLOGIQUE

SUR

LES ÎLES COLUMBRETAS

PAR

le R. P. Antonio VICENT, S. J.

Les échantillons des roches décrites dans cette notice lithologique ont été recueillis à l'ile *Columbreta-Mayor* par mon élève et ami M. Pelegrin Sanz, ingénieur civil de la province de Castellon-de-la-Plana. Les roches volcaniques qui forment les iles Columbretas appartiennent toutes à des types connus, parfaitement étudiés déjà par H. Rosenbusch ([1]), par F. Zirkel dans sa description des roches des États-Unis ([2]), par Al. Penk ([3]) et par J. Roth, qui en a donné la composition chimique ([4]). Ces travaux nous permettront d'être bref et nous dispenseront de joindre des planches à notre travail.

Les échantillons que nous possédons ne sont pas en nombre suffisant pour nous permettre d'écrire une monographie lithologique complète des iles Columbretas. Nous nous proposons de réaliser ce dessein à notre retour en Espagne, quand nous aurons rassemblé un plus grand nombre de faits et d'échantillons. Toutefois, comme il n'existe pas encore de description pétrographique de ces iles et que nous avons eu en Belgique

---

([1]) *Mikroskopische Physiographie der petrographisch Wichtigen Mineralien*, 1873.
([2]) *Microscopical Petrography*, 1874.
([3]) *Zeitschrift deutschen geologischen Gesellschaft*, p. 504.
([4]) *Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine*, 1883.

la bonne fortune d'avoir des rapports fréquents avec des géologues et pétrographes distingués, MM. Charles de la Vallée-Poussin et l'abbé A. Renard, nous avons cru ne pas devoir retarder la publication de cette notice préliminaire. L'examen des roches volcaniques des îles Columbretas a été fait dans le laboratoire pétrographique de M. A. Renard. Le savant conservateur du Musée de Bruxelles a eu l'obligeance de mettre à notre disposition toute la bibliographie du sujet, ainsi que sa riche collection de plaques minces.

Nous ignorons s'il existe, écrite en espagnol, quelque description géographique détaillée des Columbretas. Nous n'avons pu consulter que la notice publiée en 1831 par le capitaine Smyth (1). Elle confirme plusieurs des faits que nous avons pu recueillir nous-même.

I

Courte description géographique des îles Columbretas.

Tout près de la côte orientale d'Espagne, à 7 ou 8 minutes du 40e degré de latitude nord, il y a un groupe d'îlots, connu sous le nom d'îles Columbretas. Le centre de l'îlot principal, qui est à 39°53'38'' de latitude nord et à 1°35'42'' de longitude est de Paris, est situé en face de la capitale du Maestrargo, Castellon-de-la-Plana (2), et seulement à la courte distance de 67 kilomètres.

Les îles Columbretas se divisent en quatre groupes d'îlots. Au nord, nous avons la *Columbreta-Mayor*. A l'extrémité septentrionale, s'élève une montagne qui affecte la forme d'une cloche : c'est le mont *Colibre*. L'îlot tout entier s'étend en fer-à-cheval dont une extrémité, celle du nord, est occupée par le

(1) *Journal of the royal geographical Society of London*, t. I, 1830-1831.
(2) Vivien de Saint-Martin, *Nouveau dictionnaire de géographie universelle*, t. I, p. 779.

mont Colibre et l'autre par deux rochers coniques, appelés pour cette raison *Mammeolibre.*

La forme de la *Columbreta-Mayor* montre qu'elle est le reste du centre ébréché d'un ancien volcan, ouvert d'un côté et envahi par les eaux de la Méditerranée. Ce cratère a créé une petite baie nommée port *Tofiño.* Cette baie sert de retraite et de refuge aux barques de pêcheurs en cas de tourmente. Sa profondeur est de 5 à 20 brasses ; les embarcations viennent s'y garer contre tous les vents, mais surtout contre celui du nord-est, de l'est et du sud-est.

A l'ouest du mont Colibre et à une distance d'environ 1,600 mètres, se trouve le second groupe d'ilots volcaniques. Le plus considérable ressemble à une selle de cheval, on le nomme *Malespina;* les autres, plus petits, s'appellent respectivement *Banza, Espinoza, Valdes* et *Navarrete.*

Au sud du mont Colibre et à environ 5556 mètres, on rencontre *Galiano,* rocher qui a la figure d'une barque avec ses voiles enflées par le vent. Tout autour sont disséminés les ilots de *Cerquero* de *Baleato* et le récif de *Luyando.*

Entre les groupes de *Malespina* et de *Galiano* s'élève *Ferrer,* ilot considérable d'aspect semblable à celui de *Malespina.* Tout près de *Ferrer* se dresse le rocher de *Joaquin.* Enfin, entre *Ferrer* et *Malespina,* s'élève le récif de *Fidalgo.* Il s'étend à l'ouest, et près de *Joaquin* il y a le banc de *Lopez.*

Tous ces groupes d'ilots sont manifestement d'origine volcanique. L'aspect de la majeure partie des roches qui les composent et surtout la présence des tufs palagonitiques montrent à l'évidence que ces îles se seront formées par des éruptions sousmarines, ou du moins qu'elles furent envahies par les eaux de la Méditerranée : ce qui a lieu encore aujourd'hui pour les plus petites, quand il s'élève quelque tempête.

Nous croyons que le nom des îles Columbretas vient du mot latin *Coluber,* qui veut dire « serpent », à cause du grand nombre de reptiles qui y pullulent (1). Un des ouvriers de la

---

(1) Dans l'article déjà cité, Smyth écrit ce qui suit : « On sait que les géographes appli-

brigade employée en ce moment à la construction d'un phare de première classe sur le mont Colibre nous écrivait que, dans les premiers jours, les cent hommes furent uniquement occupés à tuer les serpents, les vipères et les scorpions qu'ils rencontraient à chaque pas dans l'île déserte. Ce fait confirme ce que Smyth rapporte d'une visite aux îles Columbretas en 1831 (¹).

Comme dans toutes les îles, l'érosion atmosphérique et la continuelle désagrégation des roches par les eaux de la mer ont formé un dépôt suffisant de terre végétale pour faire croître les plantes propres à cette latitude. Sur les collines de la *Columbreta-Mayor* on voit pousser l'olivier sauvage, le géranium, le myrte et des buissons de toutes sortes d'arbustes. Mais la plante la plus abondante est le Cactus (*Opuntia vulgaris*), vulgairement appelé *Nopal.* Grâce à ces fruits, la brigade employée à la construction du phare dont nous avons parlé put suppléer à l'insuffisance des approvisionnements.

II

Description des roches des îles Columbretas. — Scories basaltiques.

Le capitaine Smyth rapporte que les îles Columbretas sont formées de laves, de scories et de roches obsidiennes (²). Pourtant les échantillons que nous avons reçus de la *Columbreta-Mayor* sont des scories basaltiques et des tufs palagonitiques.

---

quaient le nom d'*Ophiusa* à une île de l'Ibérie, à cause des serpents qui y abondaient. Pour la même raison, les Romains l'avaient nommée *Colubraria.* Pourtant on n'a produit que des affirmations et jamais de preuves pour établir l'identité de cet endroit. »

(¹) « Ce qui excita surtout notre surprise, dit Smyth (*loc. cit.*), et ce qui fut vraiment remarquable, ce fut de voir les marins réellement empêchés d'user de leurs instruments par le grand nombre de serpents qui infestaient toute la contrée. Ces serpents avaient pour la plupart de deux à trois pieds de long ; ils portaient de fines stries avec des raies noires en zigzag sur un fond jaune-brillant, le ventre était blanc. Ces reptiles étaient très beaux. »

(²) « Chaque partie des îles laisse voir des laves, de l'obsidienne, et des scories aussi dures que si le feu qui leur a donné naissance venait à peine de s'éteindre. »

L'examen microscopique de ces échantillons ayant révélé des éléments identiques à ceux du basalte feldspathique compacte, nous les nommerons scories basaltiques feldspathiques. Ces scories sont caverneuses, cellulaires, d'un noir sombre, rudes au toucher. Au premier aspect, on ne reconnait aucun élément constitutif de la scorie; mais la loupe fait parfois apercevoir, brillant çà et là, une face d'augite. Quand on réduit la roche en poudre et qu'on en approche l'aimant, on constate qu'elle renferme de la magnétite en grande quantité.

Les éléments ordinaires des basaltes feldspathiques sont le plagioclase, l'augite, l'olivine et la magnétite. Aussi l'examen microscopique des scories des îles Columbretas a-t-il prouvé que ces roches appartiennent à la variété feldspathique du basalte. Nous n'avons pu retrouver dans les échantillons reçus certains représentants de la série sanidino-amphibolique des roches volcaniques. Le *trachyte* manque ainsi que la *phonolithe,* comme aussi le basalte néphélinique de la série plagioclasico-augite. Néanmoins le capitaine Smyth présume que l'îlot Ferrer est formé d'une roche phonolithique ([1]), et que les deux rochers coniques qui se trouvent à l'extrémité méridionale de *Columbreta-Mayor* sont du trachyte vitreux. Nous ne possédons pas d'échantillons des îles Columbretas permettant de contrôler cette affirmation. Mais nous ne serions pas surpris qu'il en fût ainsi; car c'est un fait commun que l'association des roches trachytiques et basaltiques. Dernièrement encore, dans l'excursion géologique que nous eûmes l'avantage de faire, en compagnie du savant P. Dressel, dans la région volcanique de Laach, nous avons recueilli bon nombre d'échantillons appartenant aux deux séries de roches volcaniques indiquées plus haut. Nos plaques minces laissent voir des cristaux microscopiques d'augite, d'olivine et de plagioclase; de petits cristaux de magnétite; une base vitreuse remplie de microlithes, de plagioclase, d'augite, de grains et de trichites de magnétite.

([1]) « A mi-chemin entre Galiano et Malespina, se trouve Ferrer, remarquable rocher phonolithique. A la pointe méridionale de Port-Tofiño sont deux rochers coniques élevés, de trachyte vitreuse, que, pour garder le mot de Coronelli, je nomme Mammeolibre. »

Dans nos plaques minces l'augite se présente en sections de différentes formes. Celles qui appartiennent à la zone ph^1 et les plans de clivage *mm* sont les mieux marqués et forment en h^1 un angle de 88°. A la lumière polarisée, l'extinction se fait suivant la bissectrice des angles de clivage. Dans les sections de la zone h^1g^1, à partir des lignes de clivage parallèles entre elles, la mesure de l'angle d'extinction nous a donné pour plusieurs sections de 30° à 33°. L'augite est fréquemment fragmentée et de formes irrégulières, à cause de l'action corrosive exercée sur ce minéral par le magma basique. Ces fragments sont généralement séparés par les plans de clivage, et l'on peut souvent rétablir à l'œil nu la position primitive du cristal. Dans quelques cristaux d'augite, l'altération et la décomposition s'accusent au centre, sur d'autres, au bord du cristal. On voit plusieurs fentes et ouvertures par lesquelles pénètre la base vitreuse. A la lumière naturelle, l'augite est de couleur verdâtre et sa surface est comme couverte de poussières. Le pléochroïsme n'est pas sensible, mais on constate le relief caractéristique. Parfois aussi l'augite est incolore et sans plans de clivage visibles, mais ses caractères optiques nous indiquent sa nature spécifique.

L'*olivine* est dans quelques-unes de nos plaques plus abondante que l'*augite*. A la lumière naturelle, elle est incolore; elle présente un relief et une rugosité apparents et renferme plusieurs enclaves de magnétite. Les bords de certains cristaux sont altérés et décolorés en jaune rougeâtre par la décomposition de l'olivine en *limonite*. Les cristaux microporphyriques de l'olivine se prolongent ordinairement suivant l'arête de la zone pg^1 et affectent diverses formes, déterminées par la combinaison des faces h^1, g^3, a^1 avec g^1. Les sections parallèles à p et à g^1 sont symétriques, et l'extinction a lieu suivant les diagonales ou suivant les côtés de la figure. Dans nos plaques minces, les sections symétriques parallèles à p ont la forme rhombique, et l'extinction se fait suivant les diagonales, tandis que les sections parallèles à g^1 sont quasi-hexagonales et l'extinction suit l'arête de prolongement pg^1 et une direction perpendiculaire à p.

Un autre élément constitutif et de première consolidation est

le *plagioclase*. Les cristaux se présentent en grand nombre avec macles d'*albite*. La périphérie et l'éclat particulier offrent une grande ressemblance avec la limpidité propre au *labrador*. Toutefois les extinctions à la lumière polarisée indiquent que les grands cristaux appartiennent à l'*anortite*. Dans les individus maclés, les extinctions successives et symétriques de deux lamelles hémitropes suivent l'arête de la zone pg^1 et ont donné un angle maximum d'extinction de 49°. Cet angle indique clairement la forme naturelle de l'anortite. De même que les autres éléments étudiés déjà, l'anortite contient des inclusions de magnétite.

Nous pouvons conclure avec évidence de cette première étude que les éléments de première consolidation des scories basaltiques feldspathiques sont les cristaux de magnétite avec les cristaux microporphyriques d'augite, d'olivine et de plagioclase.

Nos scories présentent nettement la texture microlithique du type trachytoïde des roches basiques modernes. En effet, la *base vitreuse*, incolore ou d'un vert pâle, renferme de nombreuses sécrétions cristallines de microlithes de plagioclases, certainement de *labrador* et d'*augite* appartenant à la seconde consolidation. Avec un fort grossissement, on distingue aisément les microlithes d'*augite* de ceux de *labrador*: ils sont plus petits et leur coloration jaune-rougeâtre à la lumière polarisée les fait immédiatement reconnaître. Le magma contient aussi de la magnétite en très grande quantité : on la trouve sous la forme de petits octaèdres, en granules et en trichites. Elle forme, comme on l'a dit, des enclaves dans les cristaux d'*augite,* d'*olivine* et de *plagioclase.*

III

Tufs palagonitiques.

Aux localités où les travaux de Sartorius von Waltershausen (1), Rosenbusch (2), Zirkel (3) et surtout de Penk (4) et d'autres pétrographes ont accusé la présence de tufs palagonitiques, il faut ajouter les îles Columbretas.

Nos échantillons de tufs palagonitiques présentent au premier aspect des différences très marquées. Quelques-uns, de couleur brun clair, accusent nettement la structure des roches clastiques. En effet, ils sont constitués par une base vitreuse de couleur jaune foncé, qui semble formée des cendres volcaniques. On y voit de beaux cristaux d'*augite,* des grains qui paraissent être des *lapilli* de volume et de formes différents, des fragments et des grains de palagonite à couleur de cuivre jaune pâle.

Sur d'autres échantillons, les grains de *lapilli* ne sont plus visibles, même à la loupe, et le tuf présente toujours la coloration jaune clair et jaune de cuivre propre à la palagonite.

Pourtant les tufs palagonitiques des îles Columbretas ne constituent pas des roches indépendantes, dépourvues presque complètement d'autres minéraux, comme les tufs étudiés par Sartorius von Waltershausen, par Rosenbusch (5) et Penk dans les

---

(1) Vulkan, *Gestein. von Sicilien und Island.* Göttingen, 1853.

(2) *Mikroskopische Physiographie,* pp. 141 et suiv.

(3) *Microscopical petrography,* p. 273 Washington, 1876.

(4) *Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft,* t. XXXI, p. 504, 1879, *Ueber Palagonit und Basalttuffe.* — Voici le résumé du travail analytico-critique de Penk. I. Notice historique sur la Palagonite. — II. La palagonite d'Islande. — III. La palagonite de Sicile. — IV. Roches palagonitifères de l'ouest de l'Allemagne centrale. — V. Tuf palagonitique de Hohenhöwen. — VI. Tuf palagonitique de Gleichenberg en Styrie. — VII. Tufs basaltiques de Bohême. — VIII. Tufs basaltiques d'Auvergne. — IX. Sur la péperine. — X. Tufs basaltiques de Palma, de Fernando Po. - XI. La palagonite n'existe pas comme minéral.

(5) « La palagonite est un silicate très hydraté, basique et hyalin, qui se rencontre surtout en grains comme élément constitutif dans les tufs volcaniques. Pourtant on le trouve aussi en quelques points du globe comme roche indépendante. Les gisements de cette dernière formation sont Seljadalr et Hammersfjord, en Islande, Djampang Kulon à Java, l'île James, l'une des Gallopagos et Palagonia en Sicile. »

régions volcaniques de Palagonia en Sicile, de Djampang Kulon à Java et de Seljadalr en Islande. Tous les tufs contiennent d'autres éléments, parce que, dans les échantillons où la couleur jaune est plus prononcée, on distingue à la simple vue de petits cristaux d'augite. La palagonite étant un silicate très hydraté, nous avons constaté la présence de l'eau au tube ouvert, et la perte au feu nous a donné 13 °/₀ d'eau. Enfin, l'acide chlorhydrique dissout notre palagonite en laissant un résidu silico-gélatineux.

L'examen microscopique des tufs palagonitiques nous a révélé la présence des éléments suivants : la palagonite enveloppant de rares cristaux microporphyriques d'olivine, d'augite et de plagioclase; la zéolithe, la picotite et la magnétite. Les cristaux microporphyriques d'augite, d'olivine et de plagioclase sont rares. Généralement, dans les tufs, l'olivine et l'augite se présentent fragmentées, entourées et enveloppées par la base vitreuse à couleur jaunâtre de cuivre. La *picotite* forme des enclaves dans tous les cristaux, mais surtout dans ceux d'olivine et sur toute la base. Les octaèdres de picotite apparaissent transparents par réflexion et de couleur rouge obscur. Sur quelques tufs on trouve aussi la magnétite, soit en forme d'octaèdres, soit en forme de grains répandus abondamment sur tout le magma. Dans quelques plaques minces, la magnétite est très abondante à l'état de poussière ou de granules; mais dans la majeure partie des plaques, l'élément dominant est la *picotite.*

On ne peut douter de l'existence de la magnétite dans les tufs palagonitiques des îles Columbretas, car elle s'y révèle à l'évidence avec tous ses caractères physiques. Il y a d'abord son opacité et son éclat métallique bleu par réflexion. Puis, après avoir pulvérisé un morceau de palagonite et avoir déposé la poussière sur une goutte d'eau dans le porte-objet, nous avons vu les grains de magnétite se mouvoir quand nous passions l'aimant devant le porte-objet (1).

---

(1) Nous insistons sur cette preuve de l'existence de la magnétite dans les tufs des îles Columbretas, parce que le contraire a été affirmé pour les tufs palagonitiques trouvés

Ce qui donne à nos tufs leur caractère et leur dénomination, c'est la palagonite. Elle se présente ordinairement sur les plaques minces en forme de grains anguleux et en fragments de diverses grandeurs avec les bords irréguliers. Ces grains et ces fragments sont tous transparents, de couleur jaune clair et de couleur jaune de cuivre. Cette couleur est caractéristique et fait reconnaître immédiatement la palagonite. La palagonite n'est pas indifférente à la lumière polarisée ([1]); car elle présente, quoique faiblement, le phénomène de la double réfraction. Dans quelques plaques minces, la palagonite contient des sections microlithiques de feldspath, si fines et si larges qu'elles apparaissent comme des lignes blanches.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans nos tufs, c'est qu'au milieu de presque tous les grains de palagonite on rencontre la *zéolithe*, de forme généralement elliptique et de structure fibreuse radiée. Quelques sections de palagonite présentent la zéolithe avec un noyau presque obscur, du centre duquel partent en forme de rayons les fines aiguilles cristallines de la zéolithe. On remarque de plus dans les bords de la zéolithe des fibres ressemblant à des lignes concentriques en forme de bandes. Ces bandes alternent avec des espaces de couleur jaune également

---

dans d'autres localités. Rosenbusch, *loc. cit.*, p. 142, écrit (nous citons les propres termes) : « Ausserordentlich auffallend ist bei einen so basischen Substanz, wie der Palagonit, der gänzlicher Mangel des Magneteisens : eine Eigenthümlichkeit, welche das Seljadalr Vorkommnis mit allen übrigen gemeinsam hat ». — Zirkel, *loc. cit.*, p. 273, en décrivant les tufs palagonitiques de la Nevada, affirme: « Il n'y a pas de trace d'augite, d'olivine, de *magnétite* ou de néphéline ». Cependant la magnétite se rencontre dans les tufs des autres localités. Voir le mémoire cité de Penk.

([1]) Nous lisons, il est vrai, chez Rosenbusch, *loc. cit.*, p. 141 : « Une plaque mince de palagonite de Seljadalr montre de nombreuses sections irrégulièrement terminées, de grains angulaires et de fragments plus considérables de couleur jaune ou brun-jaune complètement transparents et *indifférents à la lumière polarisée* ». — Zirkel enseigne la même chose, *loc. cit.*, p. 273 : « Ce sont des tufs, composés en majeure partie de grains et de fragments de jaune brun plus ou moins foncé. Cette masse amorphe est complètement *indifférente à la lumière polarisée.* » — Néanmoins Penk, étudiant au microscope les mêmes tufs que ceux décrits par Rosenbusch, écrit, p. 516 de son mémoire : « D'après Rosenbusch, il y a insensibilité à la lumière polarisée. Je ne puis me rallier à ce sentiment. Après plusieurs expériences sur des préparations très réussies, je dois affirmer qu'il y a eu toujours polarisation, quoique en général elle soit très faible. »

concentriques. Les espaces ou lignes restées obscures, soumises à la lumière polarisée, prennent la couleur jaune et font ainsi apparaître parfaitement la croix de la zéolithe. A la lumière naturelle, les centres de la zéolithe, c'est-à-dire la partie fibro-radiée, se montrent clairs et incolores comme de l'eau et, dans deux ou trois zéolithes, montrent la couleur rosacée ([1]). A la lumière polarisée, il se produit une croix noire dont les bords sont diffus et les extrémités épanouies, comme l'exige d'ailleurs la disposition radiée que présentent les cristaux de la zéolithe. « Il résulte de cette disposition radiée que, lorsque l'axe d'élasticité d'un des cristaux similaires coïncide avec une des sections principales des nicols, il se produit une obscurité dans la direction du diamètre de cette section et dans la direction de la perpendiculaire. Les bords de la croix vont en s'élargissant à partir du centre, parce que les cristaux les plus rapprochés de celui qui coïncide exactement avec la section principale du nicol produit aussi un effet sensible avec intensité décroissante jusqu'à une certaine distance angulaire de cette position. En tournant la platine, la croix doit par conséquent demeurer constamment orientée suivant les sections principales des nicols ([2]). »

La substance qui réunit entre eux les grains et les fragments de la palagonite est aussi de la zéolithe; mais sa structure diffère de celle qui enveloppe la palagonite et que nous venons de décrire. Elle n'a pas la forme parfaitement elliptique ou sphérique; les lignes ou bandes concentriques obscures et jaunes manquent, mais la disposition radiée des cristaux persiste. Ceux-ci, à partir d'un centre, forment des aiguilles cristallines ou plutôt des lamelles

---

([1]) C'est à juste titre que Penk nie que cette substance claire comme de l'eau présente l'*agrégat de polarisation*. « Schliesslich möchte noch der wasserhellen Substanz zu gedenken sein, welche nach Rosenbusch absolut apoler ist und nur selten eine an Zeolithe erinnernde radialfaserige Aggregat-polarisation zeigt. In den mir zu gebote stehenden Präparaten verhält sich dieselbe stets doppelbrechen. Ich möchte geneigt sein, Sie in einer Reihe von Fällen auf Grund ihrer Polarisation und ihrer auffälligen Spaltbarkeit für Kalkspath zu erklären, in anderen Fällen dürfte sie als eine Zeolithe zu deuten sein. »

([2]) D. José J. Landerer, *Introducion al estudio de la Mineralogia micrográfica*, p. 106.

de largeur différente uniformément disposées. A la lumière naturelle cette zéolithe est incolore comme les zéolithes elliptiques; à la lumière polarisée elle prend une teinte gris-bleu. La croix noire n'apparaît pas clairement. Cela indique que la disposition des cristaux de cette zéolithe est peu uniforme et peu régulière. A cause de la petitesse des cristaux de la zéolithe, il n'a pas été possible de déterminer son espèce. Pourtant, par analogie avec d'autres zéolithes, nous inclinons à la désigner par le nom de zéolithe sodique ou mésotype, ou peut-être par celui de stilbite.

Dans quelques plaques la base vitreuse jaune de cuivre se présente très obscure. A première vue on la prendrait plutôt pour du sidéromélane que pour de la palagonite. Mais en employant un grand grossissement, par exemple celui de 700 diamètres, on voit que la palagonite jaune est recouverte d'une poussière granuleuse. Cette poussière, quelque peu transparente à la lumière naturelle, est de la *picotite*, comme les octaèdres qui forment de nombreuses enclaves dans les cristaux et fragments d'olivine.

Enfin, dans presque toutes les plaques minces des tufs palagonitiques, il y a des enclaves gazeuses disposées irrégulièrement dans de très petites cavités. Pour la plupart, ces enclaves sont sphériques, quelques-unes elliptiques et toutes présentent des bords obscurs et le centre clair. D'autres enclaves sont entièrement opaques.

IV

Conclusions.

L'examen et la discussion des opinions émises par les différents pétrographes sur la formation des tufs palagonitiques sont peut-être déplacés dans une notice préliminaire. Toutefois, comme conclusion de cet essai, nous résumerons brièvement ce qui a été écrit sur la matière.

D'après Sartorius von Waltershausen, dont la théorie explique et commente celle de Rosenbusch, la palagonite n'est

pas autre chose que le sidéromélane transformé, ou, comme dit Rosenbusch, mélangé avec les produits de cette transformation. Pour prouver que cette transformation a eu lieu au sein des eaux, on affirme deux choses : 1° les tufs palagonitiques de Sicile contiennent des pétrifications marines ; 2° vu la petite quantité d'eau qui entre dans la composition du sidéromélane (il en contient seulement 0,349 °/₀), vu, d'autre part, la grande quantité que renferme la palagonite, il est évident que, si la palagonite dérive du sidéromélane, cette transformation du verre basique n'a pu se faire qu'au sein des eaux de la mer. En somme, conclut Rosenbusch, l'eau de la palagonite est due à des causes secondaires et postérieures à l'éruption volcanique. Et, puisque les tufs palagonitiques de toute provenance présentent la même microstructure et la même composition chimique, il est évident que primitivement ils ne sont pas autre chose qu'une substance granuleuse, hyaline, rejetée par éruption volcanique sous-marine et qu'ils ne doivent leur aspect et leur état actuel qu'à la transformation moléculaire qui s'est faite au sein des eaux.

Dans le dernier paragraphe de son travail critique intitulé : « Il n'existe pas de palagonite », Penk combat avec des arguments de poids l'opinion de Sartorius von Waltershausen et de Rosenbusch. Il s'efforce de démontrer qu'il n'existe pas de substance minéralogique nommée palagonite et qu'on doit rayer de la pétrographie la dénomination de tufs palagonitiques. Pour Penk, lesdits tufs ne sont pas autre chose que des résidus semblables aux *lapilli*, des cendres basaltiques, solidement cimentées par l'action de l'eau et du vent, à base vitreuse fondamentale dominante, avec des sécrétions des minéraux caractéristiques du basalte. Par conséquent, il faut dire tufs basaltiques et non tufs palagonitiques. Il est vrai que bon nombre de tufs palagonitiques manquent d'un ou de plusieurs des éléments du basalte ordinaire. Ainsi les tufs palagonitiques d'Islande contiennent seulement des sécrétions cristallines de plagioclase et d'olivine. Dans ceux d'Auvergne et de l'île de Palma, le feldspath manque et souvent aussi la magnétite; dans les tufs de Palma, la base

vitreuse ne renferme que de l'olivine et de la magnétite. Mais pour Penk ces divergences ne prouvent rien. Dans ces cas, la base vitreuse remplace les éléments caractéristiques du basalte qui manquent.

Nous ne méconnaissons pas la force des arguments produits par Penk dans le paragraphe en question. Mais nous pensons que, tout en admettant les principes établis par lui pour caractériser une roche, on continuera à appeler en pétrographie les tufs que nous étudions tufs palagonitiques et non tufs basaltiques.

Nous fondons cette manière de voir d'abord sur la remarque faite par Penk lui-même à la page 569, à savoir que les tufs palagonitiques présentent un aspect si particulier et si caractéristique qu'on les reconnait et distingue aisément des autres tufs. Il semble qu'il ne pourrait en être ainsi si les caractères physiques n'étaient tout à fait spéciaux. En outre, les tufs palagonitiques possèdent une composition chimique bien différente des autres verres basiques.

Nous transcrirons pour terminer l'analyse chimique de la palagonite faite par J. Roth (1) : « Berechnet man den Palagonit n° 8. Wasserfrei und zicht man für 14,45 °/₀ Kohlensäure, 18,39 °/₀ Kalk (32,84 °/₀ Kalkkarbonat) ab, so erhät man

SiO^2,	Al^2O^3,	Fe^2O^3,	MgO,	CaO.	Na^2O,	K^2O,	P^2O^5
49,53,	14,64,	6,92,	3,97,	14.49,	0,91,	3,51,	1,94 = 100 ».

Et Roth ajoute : « Der Gehalt an Kali und Phosphorsäure ist ungewöhnlich hoch. »

(1) *Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine*, 1883, p. 53.

NOTE

SUR

LE NÉOCOMIEN DU HAUT-JURA FRANÇAIS

PAR

l'abbé BOURGEAT [1].

On sait qu'au-dessus des étages jurassiques qui forment la masse principale des montagnes du Jura, il se rencontre çà et là, dans l'intérieur de cette chaine, des dépôts d'origine plus récente, dont le plus important est le néocomien par lequel débute la série crétacée.

C'est de ce terrain que je me propose de parler dans la présente note.

J'ai pu en effet le visiter depuis les sources du Doubs jusqu'à la perte du Rhône, et recueillir à son sujet des observations qui me semblent dignes d'être signalées.

Elles se ramènent aux trois points suivants :

1° Répartition et allures du néocomien;

2° Variation du facies et de faunes qu'il présente;

3° Division qu'on peut y établir et limite de ces dernières.

I. — Répartition et allures du néocomien.

La répartition du néocomien a été mise en lumière dans ses traits principaux par Étallon et par frère Ogérien, qui nous ont

---

(1) C'est pendant que ce travail était sous presse que j'ai eu connaissance des excellentes remarques que M. Bertrand a consignées au sujet du néocomien dans la carte géologique de Lons-le-Saulnier. On ne sera donc pas surpris qu'à mon regret je n'en fasse pas mention.

donné, le premier, une carte des régions avoisinant St-Claude, et le second, une carte à plus petite échelle de l'ensemble du département du Jura. Ils ont fait remarquer, avec raison, qu'à part les environs de Mièges et de St-Julien, tous les dépôts de ce terrain se trouvent au levant de la rivière d'Ain, où ils s'alignent en longues bandes parallèles à la chaîne. Mais ils sont loin d'avoir fait connaître toute l'étendue que ces bandes comportent et d'en avoir signalé le nombre exact.

Étallon, par exemple, paraît ne pas avoir connu le néocomien aux Crozets, à Grand-Essart, à Ponthoux, à la Rixouse et dans la combe de la Landoz. Sa carte ne représente pas non plus les taches multiples qu'il forme sur la route de Coiserette à Désertin et qui paraissent se relier l'une à l'autre dans la forêt qui domine les villages de Vulvoz et de Choux. Quant à frère Ogérien, il ne fait mention du néocomien ni à St-Claude, ni à Jeurre, ni aux Crozets, où cependant son existence ne saurait être douteuse. Il réduit aussi par trop la surface que ce terrain occupe dans la combe de Morbier et aux pieds de la Baroche, sur la ligne de Chalesmes à Fraroz. Il en résulte qu'il faut augmenter d'une quantité notable l'étendue attribuée au néocomien par ces auteurs, et, comme cette augmentation porte moins sur les bandes connues que sur des taches nouvelles qui peuvent leur servir de liaison, on doit reconnaître que l'isolement des lambeaux néocomiens est moins grand qu'ils ne l'ont cru. On s'en convainc davantage en examinant l'allure que les couches présentent presque partout et qui semble avoir été aussi, jusqu'à ce jour, peu comprise.

Beaucoup de géologues, en effet, qui se sont occupés du Haut-Jura français représentent les soulèvements en voûte sous la forme d'une crête presque régulièrement arrondie et dont les deux pentes auraient à peu près la même inclinaison. C'est une première erreur que quelques jours d'étude suffisent à dissiper, surtout si l'on parcourt les cluses de Champagnole à St-Laurent, de Morez aux Rousses et de St-Claude à Septmoncel. On y voit, en effet, que les pentes occidentales sont beaucoup plus rapides que celles qui regardent la Suisse. Mais à cette première erreur

s'en joint une seconde concernant l'inclinaison des couches. Dans le Jura, comme aux Alpes, et dans la plupart des massifs montagneux, celles-ci n'ont pas toujours un pendage en harmonie avec le relief extérieur. C'est bien le cas général pour les versants orientaux où l'on suit pendant longtemps, comme à Septmoncel, à Cinquétral, à Valfin, à Chaux des Prés et à Foncine-le-Bas, la même assise sans aucune interruption. Mais il en est tout autrement sur les abrupts qui regardent la France. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer les couches qui dominent le lac de l'Abbaye, sur le chemin de St-Claude à St-Laurent. On voit qu'avec une pente relativement douce du versant occidental de la chaine du mont Noir, les couches présentent une inclinaison qui atteint et dépasse même la verticale. Elles forment avec celles qui se relient vers le mont Ouest de l'autre côté du lac une sorte de livre couché sur le plat dont les feuillets ouverts regarderaient le nord-ouest (voir coupe n° 1). Cette disposition se reproduit en beaucoup de points et pour ne signaler que les plus importants, je citerai le Frasnois, Foncine, le Rivon, Cuttura, Ponthoux, Cinquétral, Montépile, la Chaux Berthod, la combe du Lac et le pied de la Dôle. En tous ces points, il y a un reploiement de couches qui ne peut s'expliquer que par une pression latérale immense venue du côté du massif alpin. Il est même des endroits où ce reploiement se montre tellement intense que des bandes entières de terrain ont été arrachées de leur position normale et projetées du côté de l'ouest sur des terrains plus récents. Tels sont en particulier les lambeaux de portlandien qui, détachés des hauteurs dominant la ferme de Peloset, sont venus se contourner en zigzag sur les couches néocomiennes qu'entaille la route de Leschères à St-Lupicin (voir coupe n° 2), vis-à-vis du village du Ravilloles. Tels sont aussi les quelques fragments de ptérocien que l'on voit mêlés aux mêmes formations néocomiennes sur le nouveau chemin de la Crochère et les longues bandes du jurassique qui ont glissé vers Grand-Essart au couchant de la montagne d'Avignon. C'est peut-être aussi par suite de projections semblables que se sont formées sur les confins de la Bresse quelques-unes des failles

courbes dont M. Bertrand a dernièrement entretenu la Société géologique de France, et qu'il attribue plutôt à l'action désagrégeante de l'eau. Quoi qu'il en soit toutefois de ce dernier point, l'observation des plissements dans le Haut-Jura démontre que ce sont les assises du néocomien qui en sont le plus manifestement affectées. Aussi la plupart des lacs de cette région, tels que ceux de l'Abbaye, d'Ilay, d'Étival, n'ont-ils pas d'autre raison d'être que le vide laissé vers le haut par ces couches repliées sur elles-mêmes et formant vers le bas un fond de cuvette en forme de V penché vers l'ouest (voir coupe n° 3).

La conséquence que l'on doit déduire de ces observations est que le néocomien a une surface réelle beaucoup plus grande que sa surface visible. Ce que nous en voyons n'est que la tranche, et encore celle-ci n'est-elle pas toujours complète, ainsi que nous le verrons plus loin. Il faudrait, pour juger de son étendue, pouvoir suivre et mesurer le contour extérieur des plissements qu'il forme et les déployer horizontalement. On verrait alors que les lambeaux de ce terrain devaient être beaucoup moins distants avant que le Jura eût acquis son relief.

Étaient-ils réellement unis en une seule et unique bande ou bien leur isolement actuel vient-il en grande partie de ce que, comme le supposent Étallon et Benoît, ils se sont déposés dans des sortes de fiords ou de golfes distincts? C'est là une question que j'espère pouvoir traiter dans la suite. Tout ce que je puis affirmer maintenant, c'est que les changements de facies et d'épaisseur que les premières assises de ces lambeaux présentent ne s'accusent guère plus, dans un sens transversal aux chaînes, que parallèlement à leur direction. Il en faut donc conclure que s'il y eut des golfes à l'époque du néocomien, ceux-ci n'avaient pas nécessairement l'orientation des dépressions actuelles, et que la distribution de ce terrain par bandes allongées de part et d'autre des grandes crêtes longitudinales ne donne aucune idée de la répartition qu'il présentait autrefois. La seconde conséquence qui résulte des plissements du néocomien est que dans l'étude des couches il est souvent difficile de trouver la limite supérieure des plus élevées. Car, par l'effet des renversements,

celles-ci sont très souvent en contact immédiat comme le seraient les deux mêmes surfaces d'une étoffe renversée, si bien qu'après avoir suivi la série depuis la plus ancienne jusqu'à la plus récente on poursuit la marche inverse sans aucun changement notable dans le pendage des couches. On comprend dès lors que, s'il n'y a pas de zone fossilifère parfaitement accusée, le géologue court risque d'accroître l'étage supérieur d'un nombre plus ou moins grand d'assises qu'il a déjà rencontrées plus bas. C'est ce qui est arrivé pour l'urgonien sur l'épaisseur duquel les géologues varient et qu'Étallon croyait beaucoup plus grande qu'elle ne l'est en réalité. Il est donc nécessaire, pour se rendre un compte exact de la puissance qu'il présente, de l'étudier de préférence aux endroits où le renversement n'a pas amené les dernières couches en contact immédiat.

Une troisième et non moins grande conséquence des perturbations mécaniques qui ont affecté le néocomien est la production de modifications importantes sur les couches situées du côté le plus violemment atteint. On sait que ce côté est généralement celui qui s'appuie sur les abrupts en regard vers la France. Or, lorsqu'on l'examine, on voit sans peine que les couches marneuses y présentent un développement beaucoup moins marqué qu'en contre-bas sur les dépôts de même âge restés en place. C'est à peine même s'il en reste parfois des traces comme au Rivon, où les marnes à *Ostrea Coulonii* sont beaucoup moins développées du côté des Prés que sur les flancs de la montagne de la Sourda située plus à l'ouest (voir coupe n° 4).

Même observation pourrait être faite à Cuttura, à Chaux des Prés, aux Mouillez, etc. Ce qui montre bien qu'il n'y a là qu'un simple accident mécanique, c'est que dans l'intervalle des deux renversements de Cuttura et du Rivon, près du village de Vichaumois, où les assises sont en fond de bateau, les formations présentent de part et d'autre du bassin un développement à peu près égal. Cette atténuation des marnes par suite de compression n'est pas du reste exclusivement spéciale au néocomien dans le Jura. On l'observe encore dans l'oxfordien, dont l'épaisseur

présente souvent des variations très sensibles d'un revers à l'autre d'une chaîne de montagnes. Le fait est surtout frappant aux affleurements marneux des Pontets, qui, très développés vers la Combe de Tressus, n'offrent, au contraire, qu'une puissance réduite vers Trébayard et St-Claude par suite des compressions qu'ils ont subies de la part du jurassique du Frasnois. Je crois même que c'est là, plutôt que dans l'érosion, dont on a singulièrement abusé, que se trouve en grande partie l'explication de l'étendue plus considérable que l'oxfordien présente par rapport aux formations qui le surmontent. Plastique comme il l'est, ce terrain a dû nécessairement s'amincir et s'étendre sous l'action des forces qui ont donné au Jura son relief, tandis que les autres terrains beaucoup moins souples s'écaillaient ou s'entr'ouvraient aux parties les plus tourmentées. Dans le néocomien, les couches calcaires portent aussi du côté le plus violemment bouleversé des traces visibles d'une puissante compression. Elles sont presque toujours fendillées, bréchiformes et d'une texture presque compacte. Les fossiles y sont rares et en fort mauvais état, et l'on y remarque de plus des surfaces de glissement nombreuses dont on voit de très beaux exemples, soit sur le chemin qui domine le lac de l'Abbaye, soit près du village d'Ilay.

Ces surfaces de glissement sont une preuve manifeste que les couches ne sont plus exactement dans leur ancienne position et qu'elles ont dû jouer l'une sur l'autre à la façon de la couverture et des feuillets d'un livre éraillé. Mais, de même que dans un livre ainsi décousu le jeu des feuillets a pour effet de permettre à ceux-ci de déborder la couverture, de même aussi dans le néocomien le glissement des assises a eu pour conséquence d'en mettre quelques-uns en évidence aux dépens des plus extérieures perdues sous la saillie qu'elles ont formée.

C'est là un fait qu'il est facile de constater en beaucoup d'endroits et spécialement à quelques centaines de mètres des Prés sur le chemin qui se rend au Rivon. On y voit, en effet, que le néocomien, qui repose un peu plus loin par ses assises les plus inférieures sur les dolomies portlandiennes bien visibles, s'appuie par des couches déjà élevées dans la série sur

du portlandien moyen. Plus de 25 mètres d'assises se sont ainsi engouffrés sans laisser d'autres traces que celle d'une apparence de lacune et de discordance de stratification entre le jurassique et le crétacé. J'ignore si ces glissements ont été bien remarqués, mais je sais que partout où j'en ai fait une étude attentive, comme à Cuttura, à Grand-Essart et au pied de la Dôle, j'ai vu que, malgré les apparences extérieures, le jurassique et le crétacé se trouvent parfaitement concordants.

De tout cela il faut conclure que ce n'est pas sur les revers occidentaux des chaines, mais bien sur leurs revers orientaux qu'il faut relever des coupes du néocomien, si l'on veut avoir des données aussi exactes que possible touchant sa constitution. C'est ce que j'ai toujours cherché à faire dans mes études sur les changements de facies et de faune, qui vont être exposées au paragraphe suivant.

Le résumé de celui-ci est qu'aux environs de S[t]-Claude et de Nantua, le néocomien présente plus de lambeaux qu'on ne l'a cru jusqu'à ce jour, que son étendue réelle est supérieure à son étendue apparente et que ses couches souvent renversées ne présentent pas en tous leurs points les caractères qu'elles avaient primitivement. J'ajouterai de plus que les plis qu'elles forment sont la preuve manifeste d'un refoulement latéral venu de l'est, refoulement sur lequel j'ai eu déjà l'occasion d'insister dans une note adressée à l'Académie des sciences en 1882.

II. — Principaux changements de faune et de facies que présente le néocomien.

Il est admis de tous ceux qui ont étudié le néocomien dans la région qui nous occupe qu'il présente d'un point à l'autre des variations sensibles de facies et de faune. Étallon le dit en termes formels, Émile Benoît le répète après lui, frère Ogérien nous le fait entendre dans la description de ses différentes zones, et M. Marcon s'en montre tellement convaincu qu'il en signale jusqu'à quatre facies distincts dans la bande néocomienne du val de Mièges.

Qu'il y ait exagération ou non dans les idées de cet éminent géologue, il n'en est pas moins vrai que les dépôts néocomiens ne se ressemblent pas absolument dans toute l'étendue du Jura. J'ai cru que, pour en suivre exactement les variations, il n'y avait pas de moyen plus sûr que de comparer entre elles le plus grand nombre possible de coupes. C'est pour cela que je vais en signaler seize avec autant de détails qu'il me sera possible sans trop allonger cette note. J'en déduirai ensuite les conclusions qu'elles me semblent comporter.

Voici comment ces coupes se distribuent :

1° Sur la limite ouest du néocomien et en allant du nord-est au sud-ouest : celles de Mièges, d'Ilay, d'Étival et des Crozets ;

2° Un peu plus vers l'est et en suivant la même direction : celles de St-Pierre, de la Landoz, de Leschères, de Vichaumois, de Cuttura et de St-Lupicin ;

3° En troisième ligne, et plus encore du côté de la Suisse : celles de Lezat, de Cinquétral et des Combes ;

4° En dernière ligne enfin, tout près de l'arête culminante : celles de Foncine, des Rousses, de Septmoncel et de Charix.

Le tout comprend un espace de 75 kilomètres de long sur 40 kilomètres à peu près de large.

Je commencerai par celle de Mièges qui a été déjà donnée, mais un peu différemment, par frère Ogérien et qui est très importante à raison des relations que le néocomien y présente avec celui de Neufchâtel si bien décrit par M. Jaccard et des études dont il y a été l'objet de la part de M. Marcon.

Coupe de Mièges.

La coupe en question monte du moulin du Saut, où se montre le purbeckien au village de Charbonny, près duquel apparait une tache d'aptien et de gault.

1°	Marnes purbeckiennes nacrées avec petits cailloux noirâtres . . .	2m,5
2°	Calcaire blanc avec fossiles d'eau douce	3m,0
3°	Calcaire et marnes bleues sans fossiles avec efflorescences de sulfate de chaux	8m,0
4°	Calcaire oolithique blanc sans fossiles	2m,0
5°	Marnes bleues avec *Natices* et *Venus*	1m,0
6°	Calcaire compacte	2m,0
7°	Calcaire jaunâtre marneux peu fossilifère avec *Strombus Santieri*, *Pholadomya elongata*, *Lucina Boyana* et nombreux stylolithes.	11m,0
8°	Marnes jaunes limoniteuses, bleuâtres par places, avec rares exemplaires de la *Pholadomya elongata*	13m,0
9°	Calcaire jaune à grains verts renfermant çà et là des veines de limonite	10m,0
10°	Marnes jaunes, bleuâtres par places, avec grande abondance de *Spalangus retusus*, d'*Ostrea Coulonii*, d'*Ostrea macroptera*, de *Corbis cordiformis*, de *Rhynchonella depressa*, de serpules et de bryozoaires	11m,0
11°	Marnes jaunes alternant par place avec des calcaires chloriteux avec *Terebratula prælonga*, *Rhynchonella depressa* et *Ostrea Boussingaulti*	15m,0
12°	Calcaire jaune spatique en bancs minces avec taches vertes, couvert çà et là de débris d'*Ostrea Boussingaulti*	32m,0
13°	Calcaire oolithique avec traces de polypiers et rares tests de chamas.	12m,0
	TOTAL . . .	122m5

Sur quoi les niveaux fossilifères les plus importants se répartissent ainsi qu'il suit :

1°	Niveau : Marnes bleuâtres avec *Natices* et *Venus*, n° 5 de la coupe, à	14m de la base.
2°	Niveau : Marnes jaunes limoniteuses à *Pholadomia elongata*, n° 7 de la coupe, à	26m —
3°	Niveau : Marnes jaunes bleuâtres par places à *Spotongus* n° 10 de la coupe, à	49m —

CARACTÈRES GÉNÉRAUX. — Prédominance des marnes à la base. — Texture oolithique au sommet.

Coupe de Foncine.

Telle que je l'expose ici, cette coupe est le résultat du raccordement de deux coupes distinctes, dont l'une a été prise près du village de Foncine-le-Bas, où c'est le néocomien inférieur qui se montre le mieux, et l'autre à Foncine-le-Haut, où c'est au contraire le néocomien supérieur qui est le plus visible. Le premier tronçon part du jurassique et monte jusqu'aux calcaires jaunâtres qui supportent les marnes à *Ostrea Coulonii*, l'autre commence à ces marnes pour aller jusqu'à l'urgonien. Je dois à l'obligeance de M. Barbaud, propriétaire de la carrière de gypse de Foncine, d'utiles renseignements sur les assises tout à fait inférieures.

Voici quelle est la succession des dépôts en y comprenant les assises cachées par la végétation :

1° Marnes nacrées avec gros grains noirs	3^{m}
2° Alternance du calcaire jaune et de marnes bleuâtres	5^{m}
3° Marnes nacrées avec grains noirs analogues à celles du n° 1	5^{m}
4° Calcaire jaune sableux sans fossiles avec nombreuses saillies tortueuses	10^{m}
5° Marnes bleues veinées de bandes jaunes avec *Terebratula Marcomans* et *Stylolithes*	8^{m}
6° Alternance de calcaire bleuâtre et de marnes jaunes sableuses à serpules et bryozoaires	7^{m}
7° Calcaire jaunâtre marneux, parfois oolithique avec saillies sinueuses ou stylolithes	5^{m}
8° Marnes bleues et jaunâtres avec *Ostrea Coulonii, Serpula socialis, Terebratula biplicata, Corbis cordiformis* et quelques débris d'oursins	
9° Calcaire jaune en petits bancs à taches vertes et avec *Ostrea Boussingaulti*.	15^{m}
10° Calcaire oolithique blanc avec quelques polypiers	6^{m}
11° Calcaire jaunâtre grumeleux à *Rhynchonelles depressa*	8^{m}
12° Marnes sableuses à nodules sans fossiles	2^{m}
13° Calcaire saccharoïde blanc, à chamas	9^{m}
14° Calcaire oolithique à gros grains avec chaux et polypiers.	
15° Calcaire compacte blanc légèrement veiné de rose avec nombreux tests de chamas dans la pâte	12^{m}
Total . . .	130^{m}

Les principaux niveaux fossilifères sont ici :

1°	Le niveau 6 à serpules et bryozoaires, à	49^{m}
2°	— 8 à *Ostrea Coulonii*, à	53^{m}
3°	— 9 à *Ostrea Boussingaulti*, à	58^{m}
4°	— 10 à *Rhynchonella depressa*, à	73^{m}

C'est encore la texture marneuse qui domine dans les premières assises et le facies oolithique dans les couches supérieures.

Coupe de St-Pierre.

Cette coupe est prise au levant du village dans la direction des Chauvins où le calcaire urgonien est exploité comme pierre à bâtir. La végétation qui recouvre les assises les plus inférieures près de St-Pierre ne me permet pas de dire s'il y a là du purbeckien ou non, mais les autres terrains de la série sont bien visibles. Ce sont les suivantes :

1°	Marnes jaunes à taches bleues avec *Cardium* et *Nérinées*	3^{m}
2°	Calcaire grumeleux à *Terebratula Marcousana*.	7^{m}
3°	Calcaire saccharoïde devenant oolithique par places	9^{m}
4°	Calcaire jaunâtre en petits bancs avec traces d'entroques	8^{m}
5°	Alternance de calcaire sableux et de marnes sphérolitiques en petits bancs, *Ostrea*, débris d'oursins, *Terebratula biplicata*, serpules et bryozoaires	14^{m}
6°	Marnes jaunâtres sableuses avec *Ostrea Coulonii*, *Ostrea macroptera*, *Corbis cordiformis* et quelques exemplaires de *Janira atava* . .	12^{m}
7°	Calcaire en petits bancs et à taches vertes, jaunâtre en bas, mais devenant gris vers le dessus, nombreuses petites *Ostrea* voisines de l'*Ostrea Boussingaulti*	15^{m}
8°	Calcaire oolithique avec rhynchonelles et quelques polypiers inconnus	12^{m}
9°	Calcaire jaunâtre marneux à *Ostrea Boussingaulti* et *Janira atava* .	6^{m}
10°	Calcaire oolithique à polypiers.	
	Calcaire jaunâtre sans fossiles	2^{m}
	Calcaire rosé compacte avec rares tests de chamas	15^{m}
	TOTAL . . .	124^{m}

Sans compter les couches invisibles, les niveaux fossilifères principaux sont :

1°	Les numéros 2 de la coupe à	3^{m}	de la base.
2°	— 5,6,7 —	27^{m}	—
3°	— 9 —	101^{m}	—

Le facies dominant des couches inférieures est encore le facies marneux, mais déjà mélangé de calcaire; les couches supérieures se partagent entre la texture oolithique et la texture saccharoïde avec un petit niveau de marnes.

Coupe des Rousses.

Cette coupe a été prise assez loin du village des Rousses près du chalet de Tabagno, où le néocomien se trouve affaissé entre la montagne des Tufs et celle de la Dôle sous des inclinaisons qui varient très sensiblement d'un point à l'autre et qui feraient croire parfois à des discordances de stratification.

J'y ai trouvé la succession suivante :

1° Brèches à fragments noirs et gris dépassant souvent la grosseur de la main et plus ou moins masqués par la végétation	4m
2° Calcaire blanc compacte, cristallisé par places	6m
3° Marnes jaunes sableuses à *Pholadomya elongata*, *Strombus*, *Natica sublevigata*	5m
4° Calcaire blanc saccharoïde sans fossiles	4m
5° Calcaire jaunâtre en petits bancs avec bryozoaires	12m
6° Alternance de marnes et de calcaires jaunes, plus ou moins perforés vers le dessus avec *Spatangus retusus*, *Serpula socialis*, *Ostrea Boussingaulti*, *Terebratula prælonga*.	15m
7° Calcaire spathique jaune en bancs minces et sans fossiles.	9m
8° Marnes sableuses avec lits de calcaire jaune renfermant l'*Ostrea Coulonii*, l'*Ostrea macroptera* et la *Terebratula prælonga*	13m
9° Calcaire en bancs minces de couleur jaunâtre et plus ou moins couverts de taches vertes, débris indéterminables d'*Ostrea*	18m
10° Marnes et calc. en petits bancs avec des rognons siliceux et *Janira atava*	8m
11° Calcaire blanc, parfois oolithique, mais généralement saccharoïde et peu fossilifère	19m
12° Calcaire blanc avec chamas, pétri çà et là de grosses oolithes . . .	28m
TOTAL . . .	136m

Sur quoi les niveaux fossilifères principaux se répartissent comme il suit :

1° Marnes jaunâtres sableuses à *Pholadomya* et *Strombus* n° 3 de la coupe, à.	10m	de haut.
2° Alternance de calcaires et de marnes à *Spatangus*, n° 6 de la coupe, à.	31m	—
3° Marnes sableuses à *Ostrea Coulonii*, n° 8 de la coupe, à . .	55m	—
4° Marnes et calcaires en petits bancs à *Janira*, n° 10 de la coupe, à	86m	—
5° Calcaire saccharoïde, n° 11 de la coupe, à	103m	—

Ici les dépôts calcaires et marneux ont à peu près un égal développement dans les deux tiers inférieurs de la formation. Le sommet est principalement formé par les calcaires saccharoïdes.

Coupe de Montépile.

Cette coupe, prise près du moulin de Montépile, a été donnée déjà par Étallon, mais un peu différemment. Elle présente à mon avis la succession suivante :

1° Marnes purbeckiennes nacrées renfermant quelques characées et des traces de *Physa Wealdina*	3m
2° Calcair granuleux gris plus ou moins marneux passant en haut à des marnes bleuâtres d'aspect purbeckien	9m
3° Alternance de calcaire et de marnes avec stylolithes, *Pholadomya elongata*, *Natica prælonga* et rares exemplaires de *Pigurus rostratus*.	15m
4° Calcaire oolithique blanc, facilement désagrégeable et contenant quelques polypiers.	5m
5° Alternance de calcaires et de marnes d'aspect jaunâtre, terminée par des marnes sableuses à nombreux stylolithes, *Terebratula prælonga* et *Panopea neocomiensis*	19m
6° Calcaire jaune à *Toxaster complanatus* se terminant par des calcaires blancs subcompactes en bancs épais.	12m
7° Interruption due à des marnes que la végétation recouvre.	15m
8° Alternance de calcaire jaune miroitant et de marnes sableuses avec stylolithes, pholadomies et *Ostrea Coulonii*, surface durcie. . .	21m
9° Calcaire oolithique blanc avec quelques polypiers et térébratules voisines de celles du jurassique supérieur	25m
10° Calcaire saccharoïde avec test de chamas et rares veines d'oxyde de fer	18m
TOTAL . . .	133m

Sur quoi l'on peut surtout signaler les niveaux fossilifères suivants :

1° Alternance de calcaire et de marnes avec stylolithes, *Pholadomya elongata*, *Natica prælonga* et rares exemplaires de *Pigunus rostratus*, n° 3 de la coupe, à . .	12m	de la base.
2° Marnes sableuses à *Terebratula prælonga* et *Panopea neocomiensis*, n° 5 de la coupe, à.	32m	—
3° Calcaire jaune à Toxaster, n° 6 de la coupe, à.	51m	—
4° Alternance de calcaire et de marnes sableuses à stylolithes, Pholadomyes et *Ostrea Coulonii*, n° 8 de la coupe, à .	78m	—
5° Calcaire saccharoïde à chamas, n° 10 de la coupe, à . .	124m	—

Partage des marnes et des calcaires à peu près comme aux Rousses, dans les deux tiers des assises inférieures. Le sommet moitié oolithique, moitié saccharoïde.

Coupe de Cinquétral.

Cette coupe va du moulin de Cinquétral à la forêt du Frasnois en passant près de la croix qui domine le village de Cinquétral au levant.

Les assises s'y succèdent ainsi qu'il suit :

1°	Marnes purbeckiennes nacrées	6^{m},00
2°	Calcaire rougeâtre compacte, sans fossiles.	4^{m},00
3°	Calcaire blanc oolithique, mais peu désagrégeable, avec traces de polypiers	12^{m},00
4°	Calcaire compacte jaunâtre à *Pholadomya elongata* et *Terebratula prœ'onga*	5^{m},00
5°	Calc. oolithique plus ou moins désagrégeable avec amorphozoaires.	3^{m},00
6°	Alternance de calcaire compacte jaune et de minces lits marneux bleuâtres avec *Panopea Robinoldina*, *Natica pseudo-ampulla* et perforations de pholades à la partie supérieure	11^{m},15
7°	Alternance de calcaire jaunâtre et de marnes jaunes feuilletées avec stylolithes et quelques exemplaires de la *Terebratula prœlonga.*	
8°	Marnes jaunâtres à *Toxaster complanatus*, *Terebratula prœlonga*, *Ostrea Coulonii* et *Serpula socialis.*	3^{m},50
9°	Calcaire sableux jaunâtre, devenant gris par places et empâté de débris de l'*Ostrea Boussingaulti.*	12^{m},00
10°	Marnes jaunes sableuses à *Serpula socialis* et *Ostrea Coulonii.* .	4^{m},00
11°	Calcaire oolithique jaunâtre sans fossiles visibles	12^{m},00
12°	Calcaire roux sableux à *Rhynchonella depressa* et nérinées indéterminables	3^{m},00
13°	Calcaire généralement oolithique et blanc, mais parfois rose ou compacte avec amorphozoaires et polypiers	12^{m},00
14°	Calcaire jaunâtre ferrugineux sans fossiles	5^{m},00
15°	Calc fragmenté blanchâtre à texture saccharoïde et test de chamas	28^{m},00
	TOTAL . . .	120^{m},65

Sur quoi la succession des principaux niveaux fossilifères est la suivante :

1°	Niveau : Calcaire compacte jaunâtre à *Pholadomya elongata* et *Terebratula prœlonga*, n° 4 de la coupe, à . . .	22^{m},00	de la base.
2°	Alternance de calcaire compacte jaune et de minces lits marneux bleuâtres avec *Panopea Robinoldina*, *Natica pseudo-ampula* et perforations de pholades à la partie supérieure, n° 6 de la coupe, à	30^{m},00	—
3°	Marnes jaunâtres à *Toxaster complanatus*, *Terebratula prœlonga* *Ostrea Coulonii* et *Serpula socialis*, n° 8 de la coupe, à	41^{m},45	—
4°	Marnes jaunes sableuses à *Serpula socialis* et *Ostrea Coulonii*, n° 10 de la coupe, à	56^{m},80	—
5°	Calcaire fragmenté blanchâtre à test de chamas, n° 15 de la coupe, à	92^{m},85	—

Facies inférieur un peu moins marneux qu'aux Rousses et à St-Pierre. Calcaires oolithiques et calcaire saccharoïde à peu près également développés au sommet.

Coupe de la Landoz.

Cette coupe a été relevée dans la combe de la Landoz, à quelque distance de la Chaux des Prés depuis le purbeckien qui affleure à quelques pas du chemin de la Combe jusqu'à l'urgonien visible dans les charrières qui sont à l'est dans les bois de Corinthe.

Voici quelle y est la succession des couches :

1°	Marnes gris bleuâtre avec sphérolithes noirs sans fossiles . . .	1m,50
2°	Calcaire grossier avec débris de bivalves	2m,00
3°	Marnes noires sans fossiles mais avec sphérolithes.	0m,80
4°	Calcaire blanc dolomitique.	2m,00
5°	Marnes grumeleuses bleues à nombreuses physa	1m,40
6°	Calcaire blanc saccharoïde par places et oolithique en d'autres points polypiers	8m,00
7°	Calcaire jaune ferrugineux avec *Strombus Santieri*, *Sigaretus Pidonceti* à la base et *Pholadomya elongata* au sommet . . .	22m,00
8°	Alternance de calcaire jaune et de marnes avec traces de pholades et surface durcie à la partie supérieure	17m,00
9°	Marnes jaunes ferrugineuses avec banc calcaire intercalé, *Terebratula biplicata, Ostrea Coulonii*, Toxaster et *Serpula socialis*	15m,00
10°	Calcaire en plaquettes rose ou blanc à nombreuses taches vertes et débris d'entroques.	25m,00
11°	Calcaire oolithique ou saccharoïde avec quelques rares térébratules et polypiers	18m,00
12°	Calcaire saccharoïde blanc avec longues veines rosées et nombreuses chamas	25m,00
	TOTAL . . .	111m,70

Sur quoi les niveaux fossilifères les plus importants se répartissent comme il suit :

1°	Niveau : Marnes grumeleuses à physa du purbeckien, n° 5 de la coupe, à	6m,30	de la base.
2°	Niveau : Calcaire jaune à *Strombus Santieri*, *Sigaretus Pidonceti*, *Pholadomya elongata*, n° 6 de la coupe, à	14m00	—
3°	Niveau : Marnes jaunes ferrugineuses à *Ostrea Coulonii*, n° 9 de la coupe, à	36m,00	—
4°	Calcaire saccharoïde à chamas, n° 12 de la coupe, à . .	92m,00	—

Prédominance marquée du facies calcaire à la base. Sommet divisé à peu près également entre le calcaire oolithique et le calcaire saccharoïde à chamas.

Coupe de Leschères.

Cette coupe commence près de la maison de sur le Goulet-Rond et coupe le chemin de Leschères à la Landoz pour remonter vers la croix du Rivon.

On y constate la série suivante en tenant compte de tous les moyens d'observation à droite et à gauche de la ligne qui vient d'être indiquée :

1°	Marnes nacrées avec des grains noirs parfois siliceux	3m
2°	Calcaire jaune sans fossiles avec légère intercalation de marnes jaunes	7m
3°	Calcaire blanc à grosses oolithes devenant saccharoïde par places. .	10m
4°	Calcaire compact avec *Pholadomya elongata*.	12m
5°	Marnes sableuses jaunes à stylolithes, *Natica* très nombreuses. . .	15m
6°	Calcaire compacte jaune, gros bancs avec surface supérieure durcie .	4m
7°	Alternance de calcaire jaune et de marne grumeleuse	15m
8°	Marnes jaunes ou bleues avec stylolithes, *Ostrea Coulonii, Ostrea macroptera, Toxaster complanatus, Serpula socialis*.	16m
9°	Calcaires jaunes en bancs minces, pétris d'entroques et d'*Ostrea Boussingaulti* avec couches marneuses intercalées.	18m
10°	Calcaire oölithique ou saccharoïde blanc avec quelques polypiers et moules de nérinées	25m
11°	Calcaire saccharoïde veiné çà et là d'oxyde de fer avec nombreux débris de chamas	10m
	Total . . .	125m.

Sur quoi l'on peut citer les niveaux fossilifères suivants :

1°	Niveau : Calcaire compacte à *Pholadomya elongata*, n° 4 de la coupe, à	20m	de la base.
2°	Niveau : Marnes sableuses jaunes, etc., n° 5 de la coupe, à	32m	—
3°	— Marnes jaunes à *Ostrea Coulonii, Ostrea macroptera*, etc., n° 8 de la coupe, à	66m	—
4°	Niveau : Calcaire saccharoïde veiné d'oxyde de fer, n° 11 de la coupe, à	115m	—

A peu près mêmes caractères qu'à la Landoz; marnes un peu plus développées vers le milieu de la formation.

Coupe de Vichaumois.

Cette coupe commence aux maisons de Vichaumois qui sont les plus voisines de la ferme de Montenet et descend aux scieries dont le ruisseau de Leschères est bordé.

On y trouve à partir des Dolomies portlandiennes :

1° Marnes bleuâtres grumeleuses formant une dépression recouverte par les cultures et visibles seulement	2m,50
2° Calcaire jaunâtre compacte en gros bancs sans fossiles.	6m,00
3° Calcaire oolithique rosé avec térébratules voisines de la *Subsella* et traces d'amorphozoaires	8m,00
4° Alternance de calcaire jaunâtre et de marnes argileuses à *Strombus Santieri, Pholadomya elongata* et bryozoaires	6m,00
5° Calcaire jaune verdâtre chargé d'entroques et empâté de rognons de calcédoine à inclusions calcaires	7m,00
6° Calcaire rosé à grosses oolithes analogues à des grains d'orge et renfermant des valves de l'*Ostrea Boussingaulti*.	12m, 00
7° Alternance de calcaire grisâtre à taches vertes et de minces lits de marnes sableuses à *Ostrea Coulonii, Ostrea Macroptera, Janira atava* et *Serpula socialis*	27m,00
8° Calcaire saccharoïde gris, oolithique par places, quelques polypiers et traces de chamas	20m,00
9° Calcaire saccharoïde blanc traversé par des veines avec nombreux chamas, etc.	26m,00
TOTAL . . .	114m,50

Sur quoi les niveaux fossilifères principaux se succèdent de la façon suivante :

1° Niveau. Calcaire oolithique rosé avec térébratules et amorphozoaires, n° 3 de la coupe, à	8m,50	de la base.
2° Alternance de calcaire jaunâtre et de marnes argileuses, n° 4, à *Strombus Sautieri, Pholadomya elongata*, à .	16m,50	—
3° Alternance de calcaire grisâtre à taches vertes et de minces lits marneux à *Ostrea Coulonii, Ostrea macroptera, Janira atava, Serpula socialis*, n° 7 de la coupe, à	68m,50	—
4° Calcaire saccharoïde à chamas, n° 9 de la coupe, à . .	104m,50	—

Facies calcaire encore plus marqué qu'à la Landoz, dans les deux tiers des assises inférieures. Division à peu près égale au sommet entre les calcaires oolithiques et les calcaires saccharoïdes, qui sont ici très colorés.

Coupe des Combes.

Cette coupe traverse une série de pâturages et de bois depuis le hameau de Très-le-Mur, au sud duquel elle commence, jusqu'à celui de Grand-Essart où se montre le Gault. Je l'appelle coupe des Combes parce que ce dernier hameau est à peu près à moitié chemin de son trajet.

Voici la succession qu'y présentent les couches :

1° Marnes grises nacrées avec sphérolithes noirs roulés de la grosseur d'une noisette.	1^{m},80
2° Calcaire jaune compacte en banc de 0^{m},20 sans fossiles	3^{m},00
3° Marnes nacrées à couches assez régulières avec quelques exemplaires de *Planorbis Loryi*	0^{m},80
4° Calcaire compacte en gros bancs couverts çà et là de taches jaunes.	6^{m},00
5° Calcaire oolithique avec térébratules, diceras ou chamas indéterminables et nombreux polypiers	15^{m},00
6° Marnes sableuses jaunes à *Lima Royeriana*, *Cardium* indéterminables, stylolithes et débris de silex	6^{m},00
7° Calcaire compacte jaune en bancs épais sans fossiles	8^{m},00
8° Alternance de calcaire et de marnes à *Ostrea Coulonii*, *Ostrea macroptera*, *Terebratula prælonga* et *Serpula socialis* . .	12^{m},00
9° Calcaire jaune en petits bancs avec taches verdâtres et débris d'*Ostrea Boussingaulti*	10^{m},00
10° Calcaire spathique à *Janira atava*, Perna inconnu, *Serpula socialis* et Ammonite	12^{m},00
11° Calcaire oolithique blanc à polypiers et bryozoaires de chamas . .	25^{m},00
12° Calcaire blanc saccharoïde avec nombreuses chamas et quelques polypiers	12^{m},00
TOTAL . . .	111^{m},60

Sur quoi l'on peut citer les niveaux fossilifères suivants :

1° Calcaire oolithique à térébratules, diceras ou chamas et nombreux polypiers, n° 5 de la coupe, à	11^{m},60	de la base.
2° Marnes sableuses à *Lima*, *Cardium*, etc., n° 6 de la coupe, à	26^{m},60	—
3° Alternance de calcaire et de marnes à *Ostrea Coulonii*, *Ostrea macroptera*, *Terebratula prælonga* et *Serpula socialis*, n°s 7 et 8 de la coupe, à	40^{m},60	—
4° Calcaire spathique à *Janira atava*, n° 10 de la coupe, à .	62^{m},60	—
5° Calcaire oolithique ou saccharoïde, à polypiers et chamas, n°s 11 et 12 de la coupe, à	74^{m},60 et 99^{m},60	—

Marnes inférieures un peu plus développées qu'à Vichaumois. En retour le calcaire saccharoïde supérieur est moins épais et dépourvu de couleur.

Coupe de Cuttura.

La coupe dont il est question a été relevée en partie sur le chemin qui va du village de Cuttura à Valfin et en partie dans les pâturages qui l'avoisinent.

Elle présente au-dessus du jurassique la série suivante :

1°	Marnes nacrées grumeleuses sans fossiles	1m,50
2°	Calcaire compacte jaune sans fossiles.	2m,50
3°	Marnes nacrées à *Physa Wealdina*	0m,25
4°	Alternance de calcaire et de marnes jaunâtres avec *Pholadomya elongata, Nerinea Marcousana*	15m,00
5°	Calcaire rose saccharoïde et oolithique par place avec traces de polypiers	10m,00
6°	Marno-calcaires sableux avec *Serpula socialis* et valves indéterminables d'*Ostrea*	5m,00
7°	Alternance de calcaire et de marnes plus ou moins imprégnées de silice avec *Serpula socialis* abondante, *Ostrea macroptera, Ostrea Coulonii, Pleurotomaria Neocomiensis, Terebratula tamarindus, Terebratula prælonga*	23m,00
8°	Calcaire jaunâtre en petits bancs, plus ou moins couverts d'entroques, et tacheté de vert avec intercalation de petits lits marneux à bryozoaires et *Terebratula prælonga*	15m,00
9°	Marnes grumeleuses sans fossiles et rognons siliceux	3m,00
10°	Calcaire oolithique avec polypiers et nombreuses chamas. . . .	10m,00
11°	Calcaire jaunâtre ou rose avec chamas	18m,00
12°	Calcaire compacte blanc avec perforations	21m,00
	TOTAL . . .	124m,25

Les niveaux fossilifères les plus importants sont :

1°	Alternance de calcaire et de marnes jaunâtres, etc., n° 4 de la coupe, à	4m,25	de la base.
2°	Marnes et calcaire imprégnés de silice avec *Serpula socialis*, etc., n° 7 de la coupe, à	34m,25	—
3°	Calcaire jaunâtre en petits bancs plus ou moins couverts d'entroques et tacheté de vert, etc., n° 8 de la coupe, à	57m,25	—
4°	Calcaire oolithique avec polypiers et nombreuses chamas, n° 10 de la coupe, à	75m,25	—

A peu près même facies que dans les trois coupes qui précèdent. La partie tout à fait supérieure de la formation parait dépourvue de fossiles.

Coupe de Lavans.

Cette coupe a été prise pour les assises inférieures de Lavans à St-Lupicin, suivant la rectification de la route qui se rend aux Crozets, et complétée par des observations faites au voisinage de Prat sur des assises manifestement supérieures à celles que la rectification met à nu.

Les couches s'y superposent comme il suit :

1° Marnes nacrées avec nombreux sphérolithes et traces de lignite. .	4^{m} 00
2° Calcaire blanc saccharoïde avec chamas et texture oolithique par place.	15^{m},00
3° Marnes grises sableuses avec stylolithes et *Strombus Santieri* . .	3^{m},80
4° Calcaire roux, spathique couvert de débris d'entroques et de bryozoaires	8^{m},00
5° Marnes sableuses bleuâtres et peu fossilifères en bas, jaunes et riches en *Ostrea Coulonii* au sommet	18,^{m}00
6° Calcaire roux, grenu avec nombreux rognons siliceux à la base, taches vertes et texture plus compacte au sommet, *Serpula socialis*, *Janira atava*, *Terebratula tamarindus*, *Terebratula prælonga*	23^{m},00
7° Calcaire rose oolithique sans fossiles.	22^{m},00
8° Calcaire à chamas plus ou moins saccharoïde et veiné de rose . .	25^{m},00
TOTAL . . .	118^{m},80

Sur quoi les niveaux fossilifères les plus remarquables sont :

1° Niveau : Marnes sableuses à *Strombus* et stylolithes, n° 3 de la coupe, à	19^{m},00	de la base.
2° Marnes sableuses bleuâtres et peu fossilifères en bas, jaunes et riches en *Ostrea Coulonii* au sommet, à. .	30^{m},80	—
3° Calcaire roux grenu à *Serpula socialis*, *Janira atava*, *Terebratula tamarindus*, *Terebratula prælonga*, à .	48^{m},80	—
4° Calcaire saccharoïde à chamas, à	93^{m},80	—

Réapparition du facies marneux presque complètement perdu vers Vichaumois et Cuttura. Nombreux rognons siliceux dans les couches moyennes. Fossiles rares dans les calcaires oolithiques voisins du sommet.

Coupe de Charix.

Cette coupe monte du moulin de Charix au village du même nom suivant les contours du chemin. J'y ai trouvé la succession suivante à partir du portlandien :

1°	Marnes purbeckiennes, nacrées ou bleuâtres avec sphérolithes et *Planorbis Loryi*	8m
2°	Calcaire compacte sans fossiles	12m
3°	Calcaire saccharoïde en gros bancs avec rares débris de polypiers. .	9m
4°	Alternance de calcaire et de marnes jaunâtres sableuses avec lucines à la base, *Pholadomya elongata* et *Nerinea gigantea* au sommet.	14m
5°	Calcaire jaunâtre sans fossiles.	8m
6°	Calcaire jaunâtre en petits bancs minces avec débris assez nombreux d'entroques et d'*Ostrea Coulonii*.	6m
7°	Alternance de marnes sableuses et de calcaire jaune compacte à la base, oolithique au sommet avec *Ostrea Coulonii*, *Terebratula prœlonga* et *Rhynchonella depressa* dans les marnes	32m
	Cette formation est masquée çà et là par du glaciaire.	
8°	Calcaire compacte avec tests de nérinées	14m
9°	Alternance de calcaire compact et de calcaire oolithique sans fossile .	18m
10°	Calcaire rosé, tantôt saccharoïde, tantôt oolithique, avec nombreux débris de chamas	45m
	TOTAL . . .	167m

Sur quoi les principaux niveaux fossilifères sont les suivants :

1°	Marnes nacrées, n° 1 de la coupe, à	0m	de la base.
2°	Alternance de calcaires et de marnes, etc., n° 4 de la coupe, à.	29m	—
3°	Alternance de marnes sableuses et de calcaire jaune, n° 8 de la coupe, à.	58m	—
4°	Calcaire rosé avec nombreux débris de chamas, à	122m	—

Retour au facies marneux encore plus marqué qu'à Lavans. Grande épaisseur des calcaires supérieurs.

Coupe d'Ilay.

Cette coupe commence près du hameau de la Fromagerie, où se montrent les marnes à *Planorbis Lorgi*, pour se terminer sur

le chemin d'Ilay à Chaux-du-Dombiel, à un petit pli de terrain renfermant du gault.

Voici ce que j'y ai pu constater au-dessus du portlandien :

1° Marnes blanches sans fossiles avec quelques nodules roulées . . .	3m,00
2° Calcaire marneux jaunâtre avec *Venus Ricordiana* et *Terebratula biplicata*	2m,00
3° Calcaires marneux avec enclaves granuleuses et *Planorbis Lorgi* .	1m,50
4° Marnes jaunes à *Strombus Santieri*, *Terebratula biplicata* et *Rhynchonella depressa* alternant par places avec des calcaires également jaunes	8m,50
5° Calcaire oolithique blanc avec polypiers et débris de diceras ou de chamas	4m,00
6° Marnes jaunes argileuses alternant plus ou moins avec des calcaires rosés, et contenant *Spatangus retusus*, *Corbis cordiformis*, *Ostrea Coulonii*, *Terebratula prælonga*	12m,00
7° Calcaire spathique en lames minces plus ou moins écrasé par compression.	10m,00
8° Calcaire saccharoïde très fragmenté et plus ou moins traversé de veines ferrugineuses, tests de chamas rares et presque méconnaissables	13m,00
Total . . .	54m,00

Sur quoi les niveaux fossilifères principaux sont :

1° Calcaire marneux jaunâtre avec *Venus Ricordiana* et *Terebratula biplicata*	3m,00	de la base.
2° Marnes jaunâtres à *Strombus Santieri*, *Terebratula biplicata* et *Rhynchonella depressa* alternant par places avec des calcaires également jaunes, à . . .	6m,50	—
3° Calcaire oolithique blanc avec polypiers et débris de diceras ou de chamas, à	13m,00	—
4° Marnes jaunes argileuses à *Spatangus retusus*, *Corbis cordiformis*, *Ostrea Coulonii*, *Terebratula prælonga*, n° 6 de la coupe, à	19m,00	—

Réduction considérable de la formation. Partage à peu près égal entre le facies marneux et le facies calcaire.

Coupe d'Étival.

Cette coupe a été relevée presque tout entière près des moulins d'Étival à quelques pas de la ferme de la Crochière. Seulement, comme en ce dernier point les formations inférieures sont

masquées par la végétation, j'y ai suppléé par des observations faites à quelque distance de là sur le nouveau chemin des Crozets.

Les assises m'ont paru s'y succéder comme il suit :

1° Marnes nacrées avec sphérolithes noirs ou gris de la grosseur d'une noisette à celle d'une noix	2m,50
2° Marnes jaunâtres ou grisâtres avec *Terebratula prælonga* et débris d'*Ostrea* et d'autres bivalves	5m,00
3° Marnes blanchâtres grumeleuses, voisines de celle de la formation 1 en gros bancs	1m,50
4° Calcaire blanchâtre ou bleu avec grosses oolithes engagées dans la pâte, sans fossiles	16m,00
5° Marnes sableuses jaunâtres ou bleues, passant au calcaire jaune dans leur partie supérieure, *Ostrea Coulonii*, *Corbis cordiformis*, *Terebratula prælonga*, *Spatangus retusus* et traces rares de *Serpula socialis*	18m,00
6° Calcaire jaunâtre tacheté de vert en bancs minces	13m,00
7° Calcaire blanc rosé à chamas très peu visible	18m,20
TOTAL . . .	74m,20

Les niveaux fossilifères principaux sont les suivants :

1° Niveau : Marnes à *Terebratula prælonga*, débris d'*Ostrea* et d'autres bivalves, n° 2 de la coupe, à	2m,50	de la base.
2° Marnes sableuses jaunâtres ou bleues à *Ostrea Coulonii*, *Corbis cordiformis*, *Terebratula prælonga*, *Spatangus retusus* et traces rares de *Serpula socialis*, n° 5 de la coupe, à	25m,00	—
3° Calcaire rose à chamas, n° 7 de la coupe, à	36m,00	—

Facies littoral dans les dépôts inférieurs granuleux ou pétris de grosses oolithes. Partage à peu près égal entre les marnes et les calcaires. Réduction comme à Ilay.

Coupe de Lezat et des Mouillez.

Cette coupe provient du raccordement des formations néocomiennes de Lezat et des Mouillez, qui sont distantes seulement l'une de l'autre de quelques centaines de mètres et qui ne sont pas également observables aux deux localités. A Lezat, par exemple, ce sont les assises inférieures que l'on aperçoit le mieux, aux Mouillez ce sont les supérieures.

Voici la succession que j'y ai trouvée à partir des Dolomies portlandiennes très visibles du côté des Villars :

1° Marnes gris-perle sans fossiles avec sphérolithes noirs allant de la grosseur d'une lentille à celle d'une noix.	2m,50
2° Alternance de calcaire jaune en bancs minces avec lits marneux et test indéterminables de bivalves	10m,00
3° Calcaire oolithique à térébratules analogues à celles du corallien et nombreux amorphozoaires	6m,00
4° Calcaire verdâtre à texture serrée sans fossiles.	5m,00
5° Calcaire roux et peu consistant en lames minces avec *Lucina Rouyana*, Natices et rares exemplaires de *Pholadomya elongata*.	8m,00
6° Marnes sableuses jaunâtres ou bleues avec *Ostrea Coulonii, Corbis cordiformis, Terebratula prælonga*	9m,00
7° Calcaire marneux, jaune avec bryozoaires au sommet	12m,00
8° Calcaire oolithique désagrégeable avec traces de polypiers; le calcaire à chamas semble faire défaut	10m,00
Total . . .	72m,50

Sur quoi les niveaux fossilifères les plus importants sont :

1° Niveau : Calcaire oolithique à térébratules et à amorphozoaires, n° 3 de la coupe, à	12m,50	de haut.
2° Niveau : Calcaire roux peu consistant en lames minces à *Lucina Roujana, Pholadomya elongata*, n° 5 de la coupe, à	23m,50	—
3° Niveau : Marnes sableuses jaunâtres ou bleues avec *Ostrea Coulonii, Corbis cordiformis, Terebratula prælonga*, n° 6 de la coupe, à	31m,50	—

Prédominance du facies calcaire à la base de la formation. Développement marqué du dépôt coralligère oolithique que l'on observe aux Combes, à Leschères, etc.

L'ensemble de ces coupes démontre d'abord que le néocomien est loin d'avoir la même épaisseur et que celle-ci est en général beaucoup plus grande vers les hautes chaines que du côté de l'ouest. Les localités d'Ilay et d'Étival, où il ne montre qu'une puissance de 70 à 80 mètres, sont en effet à la limite occidentale de la surface qu'il occupe et à une faible distance de la vallée de l'Ain, tandis que celles de Foncine, de Montépile, des Rousses et de Charix, où il est le plus développé, sont très voisines de la Suisse. Dans l'intervalle, son épaisseur varie assez régulièrement entre 110 et 130 mètres, à l'exception cependant des localités de Lézat et des Mouillez où les formations supérieures sont moins

puissantes qu'ailleurs. Peut-être l'érosion les a-t-elle enlevées, peut-être existait-il là des conditions spéciales qui ne lui ont pas permis d'acquérir le même développement qu'ailleurs.

Pour ce qui regarde la texture des assises, on voit sans peine que les plus élevées présentent toutes, sans exception, le facies calcaire, tantôt oolithique, tantôt saccharoïde ou plus ou moins compacte. Mais les inférieures n'offrent plus la même uniformité. Généralement marneuses à Foncine, aux Rousses, à Montépile et à Charix, elles se mêlent de calcaire vers Cinquétral, Cuttura, St-Lupicin, Leschères, St-Pierre et Nozeroy, puis elles se montrent presque complètement calcaires à Vichaumois, à Leschères, à Lézat, à la Landoz, à Étival et à Ilay.

A ce passage au calcaire se rattache dans les premières assises de la formation l'apparition d'un facies oolithique à polypiers et amorphozoaires qui est bien accusé aux localités des Combes et de Lézat à partir desquelles il diminue vers Ilay et Étival à l'ouest; Leschères, Cuttura et St-Lupicin au sud; Cinquétral, St-Pierre et les Rousses à l'est et au nord. C'est le facies déjà signalé par M. Bertrand à Lézat. On ne trouve ailleurs ce facies qu'au n° 8 de la coupe de St-Pierre, au n° 10 de celle de Foncine, au n° 11 de celle de Cinquétral et au n° 8 de celle de Charix qui sont beaucoup plus haut, et encore dans ces deux dernières localités les débris organiques semblent-ils faire défaut.

Le purbeckien, sur lequel repose tout l'ensemble, présente aussi des caractères qui sont très dignes de remarque. On constate, en effet, qu'à Étival, à la Fromagerie, aux Combes, à Cuttura et à la Landoz, les marnes nacrées qui en forment la principale masse se répètent à deux niveaux différents, comprenant dans leur intervalle des bancs calcaires qui ne se distinguent que difficilement des assises qui viennent au-dessus. La texture de ce curieux dépôt varie aussi d'une façon très sensible. Il est, en effet, des localités telles que celles des Combes, de Vichaumois où les sphérolithes sont rares. Tout au plus les marnes sont-elles légèrement granuleuses; mais il en est d'autres, comme Lavans, les Crozets, la Landoz et Mièges, où ces sphérolithes sont abondants, et quelques-uns où l'ensemble du purbeckien est

constitué par une puissante brèche. C'est sous cet aspect qu'il se présente, non seulement aux Rousses et sur tout le revers occidental de la Dôle, mais encore dans la Combe de Morbier et au pied du col de la Savine du côté de St-Laurent. On voit là des blocs anguleux de couleurs diverses et d'une grosseur comprise entre celle d'une noix et celle de la tête s'étendre en masse qu'on serait presque tenté de prendre pour des débris glaciaires agglutinés si les assises qui les surmontent n'en faisaient connaître l'âge. Je ne puis leur assigner moins de 15 mètres à la Dôle où ils s'étalent encore à deux niveaux, comprenant des formations plus régulières dans leur intervalle. Enfin, aux deux localités de Lavans, près de St-Claude et de Champformier un peu au levant de Charix, le purbeckien présente d'assez nombreux débris de lignites. Quant aux assises supérieures, bien qu'elles soient calcaires dans leur ensemble, il y a lieu d'y distinguer un niveau très manifestement oolithique et un autre à texture plus serrée. Le dernier couronne presque partout le néocomien et renferme de nombreux débris de chamas qui ont déterminé les géologues à en faire le sous-étage urgonien. Le second, plus pauvre en débris de cette nature, mais assez riche en polypiers, forme tantôt une masse unique supportant le calcaire à chamas, comme cela a lieu surtout à la Landoz, à Leschères et aux Combes, tantôt des niveaux multiples entre lesquels s'intercalent soit des calcaires compactes blancs, soit des calcaires jaunâtres marneux, soit des couches plus ou moins épaisses du calcaire saccharoïde à chamas qui finit par le recouvrir. Les marnes jaunes n° 9 de la coupe de St-Pierre et le n° 12 de celle de Cinquétral sont des enclaves de cette nature.

Aux trois localités de Charbonny, de Lézat et d'Ilay, les chamas sont tellement rares que je suis porté à croire que le néocomien n'y a pas son dernier couronnement. Ce couronnement est en général d'autant plus épais qu'on se rapproche davantage des hautes chaînes, comme l'indiquent les coupes de Leschères, de Lavans, de Montépile, de Foncine, des Rousses et de Charix. On peut remarquer à la texture de plusieurs des coupes précédentes qu'il présente en plusieurs points une teinte

rosée ou qu'il est traversé par des veines d'oxyde de fer qui le font exploiter comme marbre dans le voisinage de Prat. Ce caractère ne lui est cependant pas essentiel, car il est aussi souvent d'un beau blanc de sucre. La preuve que les marnes qui le traversent ne lui sont pas contemporaines est qu'on les voit passer souvent de la base au sommet de la formation ou se porter même vers les marnes qui forment la partie moyenne du néocomien, offrant ainsi les caractères d'éjections effectuées après coup. Je laisse à d'autres géologues d'en déterminer l'âge.

Il n'en est pas absolument de même de certains silex qu'on rencontre vers le milieu du néocomien. Ceux-ci, en effet, suivent si bien la disposition des assises qu'ils doivent être de même âge qu'elles.

C'est entre Lavans et St-Lupicin qu'ils se montrent surtout abondants (formations portant le n° 6 de la coupe précédemment donnée).

A partir de là, on les voit diminuer, soit dans la direction de Vichaumois, soit du côté de Cinquétral. Chose curieuse, on trouve assez souvent dans leur intérieur des cristaux parfaitement nets de carbonate de chaux, bien qu'aucune cavité ni aucune fissure ne puissent laisser supposer l'introduction du calcaire par l'intermédiaire de l'eau.

Aux différences de facies correspondent aussi des différences de faune assez intéressantes à noter.

Nous venons de voir, en effet, qu'un peu au-dessus du purbeckien l'apparition d'un facies oolithique entrainait l'apparition de polypiers, et que vers le sommet du néocomien les chamas se trouvent plus spécialement localisés dans les calcaires saccharoïdes. Dans l'intervalle de ces deux dépôts on constate aussi une subtitution marquée d'espèces à d'autres suivant la structure des couches. Ainsi, tandis qu'à Mièges les oursins, la *Corbis cordiformis*, l'*Ostrea Coulonii* et l'*Ostrea macroptera* sont abondantes, vers le milieu du dépôt on les voit devenir plus rares aux Rousses. A partir de ces localités vers le sud-ouest, l'*Ostrea Coulonii* continue à se montrer quoique moins abondante. L'*Ostrea macroptera* fait très souvent défaut, ainsi que les

oursins. La *Corbis cordiformis* disparaît tout à fait. Quant aux bryozoaires, si nombreux près de la croix de Censeau et près des ponts de Mièges et de Doye, on les voit diminuer peu à peu à St-Pierre, à Vichaumois et à Cuttura et dans la direction des Rousses et de Septmoncel pour ne réapparaître en abondance que du côté de Charix. Les entroques dont certains bancs calcaires sont couverts paraissent avoir leur maximum de développement dans le voisinage de Vichaumois et de St-Lupicin. Pour les serpules, c'est à Nozeroy, St-Pierre, Cuttura et St-Lupicin qu'elles abondent le plus, spécialement la *Serpula socialis*. Enfin, la *Pholadomya elongata*, que l'on trouve à la base du néocomien, et la *Janira atava*, qui se montre aux deux tiers de sa hauteur, paraissent avoir leur maximum de développement vers les localités de Mièges et de St-Pierre à partir desquelles elles deviennent plus rares vers le sud.

Je dois dire ici que, malgré mes actives recherches, il n'y a que deux gisements néocomiens, ci-dessus mentionnés, qui m'aient fourni des Céphalopodes. Ce sont ceux de Mièges et des Combes. Peut-être serai-je plus favorisé dans la suite; mais j'opine à croire, en attendant, que leur nombre est beaucoup moins grand que ne l'indiquent frère Ogérier et M. Marcou.

Une seule localité m'a fourni, vers la base du dépôt, une faune de Gastéropodes abondante. C'est celle de Leschères. J'ignore s'il faut rattacher à cette faune les quelques Gastéropodes des genres Natices et Nérinées que l'on observe à peu près au même niveau à Septmoncel et à Lézat.

Une chose aussi curieuse à noter est la rareté des débris organiques dans les marnes néocomiennes dont la teinte est bleuâtre. Le fait est surtout sensible vers le milieu de la formation,; l'on y voit l'*Ostrea Coulonii* disparaître partout où cette teinte bleue devient prédominante.

Quoi qu'il en soit, cependant, de l'influence plus ou moins grande de tel ou tel genre de dépôt sur la manifestation de la vie, on ne saurait trop reconnaître que les anciens auteurs ont eu raison de prendre cette même *Ostrea Coulonii* comme caractéristique du néocomien moyen du Jura. C'est, en effet, le fossile

qui s'y montre le plus abondant et qui s'y maintient le mieux du nord au sud.

Pour les assises inférieures, il me semble qu'on ferait bien de supprimer toutes des dénominations de Roches d'Auberson, de Limonite de Métabief, etc., ou autres équivalentes qui les désignent chez beaucoup de géologues jurassiens, pour adopter celui de couches à *Philadomya elongata.* Car c'est de tous les fossiles de ce niveau celui qui paraît se maintenir le mieux et qui est le plus facile à reconnaître.

Quant aux assises urgoniennes, je ne verrais à modifier dans leur dénomination que l'expression trop exclusive de Calcaire à Chamas. J'aimerais qu'on y fît mention du facies à Polypiers, qui n'y fait que rarement défaut.

III. — Divisions à établir dans le néocomien et leurs limites.

Ainsi entendu, le néocomien du Jura comprendrait trois divisions dont la limite peut, ce me semble, être assez facilement précisée.

Lorsque, en effet, on se reporte aux coupes qui précèdent, on trouve presque toujours une ligne de séparation nettement accusée entre les formations à *Pholadomya elongata*, qui surmontent immédiatement le jurassique, et celles à *Ostrea Coulonii* qui se rencontrent plus haut.

Cette ligne est, par exemple :

A Foncine, dans les marnes à Serpules et à Bryozoaires, n° 6 de la coupe;

A Saint-Pierre, dans la partie supérieure de marnes semblables et de même faune, marquées n° 5;

A Leschères, entre le dépôt calcaire n° 6 de la coupe, qui se termine par une surface durcie, et les alternances de calcaires et de marnes portant le n° 7;

A la Landoz, au-dessus des formations n° 8 de la coupe, qui se terminent également par une surface durcie et des trous de Pholades;

A Vichaumois, à la terminaison des marno-calcaires à Bryozoaires, n° 4 de la coupe ;

A Cuttura, à l'assise marno-calcaire sableuse où domine la *Serpula socialis,* n° 6 de la coupe ;

A Lavans, immédiatement au-dessus de la formation n° 4, où se montrent les Bryozoaires ;

A Cinquétral, au-dessus de l'assise n° 6, percée de trous de Pholades ;

Aux Rousses, dans les couches supérieures du dépôt n° 5, qui renferment des Bryozoaires.

Ce qui montre qu'en somme partout où les assises n'ont pas été trop fortement bouleversées ou bien où la végétation ne les recouvre pas, un dépôt d'eaux peu profondes, tantôt riche en Bryozoaires et en Serpules, tantôt percé de trous de Pholades, sépare le néocomien inférieur du néocomien moyen.

Quant à ce dernier, sa limite supérieure est tout indiquée par la disparition des teintes jaunes du calcaire et des marnes et par l'apparition des teintes blanches qui caractérisent l'urgonien. A ce changement de couleur correspondent aussi des changements très notables dans la faune. Plus ou presque plus d'Ostrea, plus de Serpules, plus d'Oursins, mais seulement des Polypiers, quelques Térébratules et des Chamas. De plus, les rognons siliceux que l'on trouve dans le néocomien moyen, tant à Lavans qu'à Cuttura, les marnes sableuses à Sphérolithes qui s'observent à Foncine, les Nérinées roulées qui se montrent à Cinquétral prouvent qu'à cette époque du néocomien la sédimentation ne s'effectuait pas partout à l'abri du mouvement des flots.

D'après ces divisions, le néocomien inférieur aurait à peu près 30 mètres de puissance, le néocomien moyen de 30 à 45 mètres et le néocomien supérieur de 20 à 50 mètres, suivant les localités.

Nozeroy, Foncine, Saint-Pierre, Les Rousses et Montépile seraient les localités où les deux premiers étages offriraient leur plus beau développement.

Charix, Les Rousses et Lavans, celles où l'urgonien atteindrait la p'us grande puissance.

Ce serait aux dépens du plus inférieur de ces étages que les formations d'Étival et d'Ilay se trouveraient amoindries, comme si la mer, après la formation d'eau douce du purbeckien, n'était revenue que tard du côté de l'ouest.

Par contre, la faible épaisseur de l'urgonien près de Mièges ferait croire que cette partie du Jura n'était plus dans les conditions voulues pour recevoir des dépôts sédimentaires à une époque où ceux-ci se formaient encore abondamment près des Rousses et de Charix.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Nº 1. — Coupe générale des formations jurassiques et néocomiennes de Montépile à Pontoux, montrant les plis du néocomien et les compressions subies par les marnes de cet étage ou leur disposition comme à Montépile.

LÉGENDE.

1. Lias.
2. Jurassique inférieur.
3. — moyen.
4. Jurassique supérieur.
5. Néocomien.

Nº 2. — Coupe du néocomien et du jurassique depuis la ferme de Peloset jusqu'à la montagne de Ravilloles.

LÉGENDE.

1. Ptérocérien.
2. Calcaire portlandien inférieur.
3. Dolomies portlandiennes (plissées).
4. Purbeckien (perdu sous les dolomies plissées).
5. Néocomien inférieur.
6. Marnes à *Ostrea Coulonii.*
7. Urgonien.

Nº 3. — Coupe des Frasses aux Bez en passant par le lac de l'abbaye.

LÉGENDE.

1. Portlandien.
2. Purbeckien (souvent perdu à gauche).
3. Néocomien inférieur.
4. Marnes à *Ostrea Coulonii* (écrasées vers la gauche,.
5. Urgonien.

Nº 4. — Coupe du néocomien et du jurassique entre le village des Prés et le bois de la Sourda en passant par le Rivon.

LÉGENDE.

1. Oxfordien.
2. Formation à *Cidaris florigemma.*
3. Corallien inférieur et astartien.
4. Ptérocérien.
5. Portlandien inférieur.
6. Dolomies portlandiennes perdues à gauche de la figure.
7. Purbeckien également perdu.
8. Néocomien inférieur.
9. Marne à *Ostrea Coulonii* écrasées vers la gauche.
10. Urgonien.

1 2 3 4 5 8.9 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Les Près de Valfin

Le Rivon

Bois de la Sourda

N° 4

Mon

Villars St

Mt Chab

près de St Cl

Bienne

Pont

N° 1

PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DU

PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL

DU SECOND ORDRE

DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR

M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Inspecteur général des mines,
Membre de l'Institut.

PREMIÈRE PARTIE

Déterminations fondamentales

I

PRÉLIMINAIRES.

1. Les recherches de mécanique et de physique mathématique ont depuis longtemps attiré l'attention des géomètres sur l'opération analytique représentée par le symbole :

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

et appliquée à une fonction de trois variables indépendantes. On sait, par exemple, que le résultat sera toujours identiquement nul si cette fonction représente le potentiel d'un point soumis à l'action de la gravitation de la part d'un système matériel quelconque dont il ne fait pas partie, ou encore si elle exprime la température d'un corps homogène en équilibre thermique, ou

enfin la dilatation cubique d'un solide non cristallisé en équilibre d'élasticité. Il en est encore de même quand il existe pour un liquide en mouvement une fonction dont les dérivées partielles fournissent en chaque point les composantes de la vitesse. Lamé considérait cette opération comme constituant « une » *dérivée naturelle*, plus essentielle, plus simple et en même » temps plus complète que toutes les dérivées partielles choisies » plus ou moins arbitrairement, que l'on a l'habitude de consi» dérer (*). » Il la désignait à l'aide du symbole Δ_2 pour la distinguer d'une autre opération qu'il représentait par Δ_1. Il les nommait l'une et l'autre *paramètres différentiels du premier et du second ordre*. Mais il avait également proposé pour Δ_2 le nom d'*augment* (**), qui est plus simple et que nous emploierons de préférence ici pour abréger le discours. M. Boussinesq en a éclairci la nature d'une manière très intéressante (***), en montrant que le tiers de cet augment est la valeur moyenne des dérivées secondes prises pour toutes les directions possibles autour du point qui a pour coordonnées x, y, z.

3. L'opération qui consiste à répéter deux fois de suite celle de l'augment présente également par elle-même une grande importance. On sait, par exemple, que son résultat sera de même identiquement nul si on l'applique à l'expression des composantes des forces élastiques d'un solide en équilibre, ou encore aux projections des déplacements moléculaires d'un corps vibrant. L'équation différentielle qui égale à zéro le double augment $\Delta_2\Delta_2$ d'une fonction de trois variables, a fait l'objet d'un intéressant travail de M. E. Matthieu (IV). Cette opération, qui revient à la suivante :

$$\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4} + \frac{d^4}{dz^4} + 2\frac{d^4}{dx^2dy^2} + 2\frac{d^4}{dy^2dz^2} + 2\frac{d^4}{dz^2dx^2},$$

(*) LAMÉ, *Coordonnées curvilignes*, p. 25.

(**) *Ibidem*, p. 28.

(***) BOUSSINESQ, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, p. 44. Paris, 1885, chez Gauthier-Villars.

(IV) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIV, p. 378.

5. Il est, du reste, facile et il ne sera pas inutile, puisque nous n'avons eu égard jusqu'ici qu'à des conditions nécessaires, de vérifier *à posteriori* que ces fonctions jouissent en effet de la propriété voulue. On a, à cet égard, pour la première (5) :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x-\alpha}{\varphi},$$

et, pour une fonction quelconque f de φ :

$$\frac{df(\varphi)}{dx} = f'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx} = f'(\varphi)\frac{x-\alpha}{\varphi},$$

$$\frac{d^2f(\varphi)}{dx^2} = f''(\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{x-\alpha}{\varphi} - f'(\varphi)(x-\alpha)\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2} + \frac{f'(\varphi)}{\varphi}$$

$$= \frac{f'(\varphi)}{\varphi} + (x-\alpha)^2\left\{\frac{f''(\varphi)}{\varphi^2} - \frac{f'(\varphi)}{\varphi^3}\right\}.$$

En ajoutant cette égalité avec celles que l'on obtiendrait en différentiant relativement à y et z, il viendra :

$$\Delta f(\varphi) = 3\frac{f'(\varphi)}{\varphi} + \left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}\left\{\frac{f''(\varphi)}{\varphi^2} - \frac{f'(\varphi)}{\varphi^3}\right\},$$

et finalement cette relation essentielle :

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \Delta f(\varphi) = f''(\varphi) + 2\frac{f'(\varphi)}{\varphi}.$$

6. On a de même, pour l'expression (6) :

$$\Phi\frac{d\Phi}{dx} = b\,\{b(x-\alpha) - a(y-\beta)\} - c\,\{a(z-\gamma) - c(x-\alpha)\},$$

et comme a, b, c désignent les cosinus des angles d'une droite avec les axes rectangulaires :

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{(1-a^2)(x-\alpha) - ab(y-\beta) - ac(z-\gamma)}{\Phi}.$$

démonstration s'appliquera alors au premier augment pour atteindre le second, puisque le caractère fondamental aura déjà persisté en passant de la fonction proposée à ce premier augment. Notre point de départ doit donc être la détermination, dans toute sa généralité, de la fonction typique φ capable de cette propriété.

II

RECHERCHE DE LA FONCTION TYPIQUE.

4. On a pour cela identiquement :

$$\frac{df(\varphi)}{dx} = f'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d^2f(\varphi)}{dx^2} = f''(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + f'(\varphi)\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Si l'on imagine des équations semblables pour les variables y et z et qu'on les ajoute à cette dernière, il viendra :

$$\Delta f(\varphi) = f''(\varphi)\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\} + f'(\varphi)\Delta\varphi$$

On demande que le second membre ne dépende que de φ, quelle que soit la fonction f. Il faut donc, et il est en même temps suffisant, qu'il en soit de même individuellement de chacun des coefficients :

$$\Delta\varphi,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = h^2,$$

h désignant précisément ce que Lamé appelait le paramètre différentiel du premier ordre de la fonction inconnue φ.

Imaginons la famille de surfaces représentée par l'équation :

(2) . . . . $\varphi(x, y, z) = \text{constante},$

en donnant à la constante successivement toutes les valeurs pos-

sibles. On sait qu'alors (*) h marque en chaque point de l'espace le rapport $\frac{d\varphi}{dn}$, si $d\varphi$ est la différence des constantes qui caractérisent la surface menée par ce point et celle qui en est infiniment voisine, et dn la longueur de normale interceptée entre elles au point considéré. Puisque la fonction φ doit être telle que h, c'est-à-dire $\frac{d\varphi}{dn}$, ne dépende que de φ, et qu'en même temps φ reste constant sur toute l'étendue de la surface, il en sera de même de $\frac{d\varphi}{dn}$. Mais $\varphi + d\varphi$ garde aussi une même valeur sur toute l'étendue de la seconde surface. Donc $d\varphi$ est lui-même invariable, et par suite enfin dn. En conséquence les deux surfaces se trouvent partout à la même distance estimée suivant la normale, ou, en d'autres termes, l'équation (2) doit représenter une famille de surfaces parallèles.

Invoquons en second lieu l'expression de la courbure moyenne (**) ou celle de la somme des courbures des deux sections principales :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{dh}{d\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{\varphi}.$$

On demande ici que $\Delta\varphi$ et h ne dépendent que de φ, et par suite aussi $\frac{dh}{d\varphi}$. Le second membre ne renfermera donc que ce seul paramètre qui est constant tout le long de chacune de nos surfaces, et par conséquent ces dernières doivent être telles qu'elles présentent partout la même courbure moyenne.

Cette courbure moyenne peut d'après cela être caractérisée, pour chacune de ces surfaces, par la longueur n comptée sur une normale quelconque entre elle et une surface fixe prise comme repère de comparaison :

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = F(n).$$

On aura d'après cela sur la surface voisine :

$$\frac{1}{\rho + dn} + \frac{1}{\rho' + dn} = F(n + dn),$$

(*) LAMÉ, *Coordonnées curvilignes*, p. 11.
(**) *Ibidem*, p. 12.

car les sections principales sont, dans des surfaces parallèles, tracées par les mêmes surfaces développables, de telle sorte que chacun des rayons principaux augmente de dn pour passer de l'une à l'autre. On a donc, en retranchant :

$$\frac{dn}{\rho(\rho + dn)} + \frac{dn}{\rho'(\rho' + dn)} = F(n) - F(n + dn),$$

et, en passant à la limite :

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{F(n) - F(n + dn)}{dn} = - F'(n).$$

Les équations (3) et (4) devant avoir lieu ensemble, on voit que ρ et ρ' sont individuellement constants sur chacune de nos surfaces. Or, M. Bertrand, et après lui M. O. Bonnet, par une voie différente (*), ont établi qu'une telle surface ne peut être qu'une sphère ou un cylindre de révolution (**). Du reste, nous avons reconnu tout d'abord que l'ensemble doit être formé de surfaces parallèles; donc enfin l'équation (2) ne peut représenter que des sphères concentriques ou des cylindres de révolution décrits autour du même axe.

En résumé, la fonction typique $\varphi(x, y, z)$ comporte deux solutions distinctes et n'en admet pas davantage (***). La première est l'expression de la distance à un point :

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

et la seconde celle de la distance à une droite :

$$(6) \quad \Phi^2 = \{ b(x-\alpha) - a(y-\beta) \}^2 + \{ c(y-\beta) - b(z-\gamma) \}^2 + \{ a(z-\gamma) - c(x-\alpha) \}^2.$$

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e sér., t. V, p. 193.

(**) Il est inutile d'y joindre le plan, dont la considération ne présenterait ici aucun intérêt.

(***) Je parle des solutions essentielles, car il est bien clair que toute fonction de l'une ou l'autre de ces deux expressions formera elle-même une solution, et pourrait, aussi bien que φ ou Φ, servir de paramètre constant aux sphères et aux cylindres de révolution.

5. Il est, du reste, facile et il ne sera pas inutile, puisque nous n'avons eu égard jusqu'ici qu'à des conditions nécessaires, de vérifier *à posteriori* que ces fonctions jouissent en effet de la propriété voulue. On a, à cet égard, pour la première (5):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{x-\alpha}{\varphi},$$

et, pour une fonction quelconque f de φ :

$$\frac{df(\varphi)}{dx} = f'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx} = f'(\varphi)\frac{x-\alpha}{\varphi},$$

$$\frac{d^2f(\varphi)}{dx^2} = f''(\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{x-\alpha}{\varphi} - f'(\varphi)(x-\alpha)\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2} + \frac{f'(\varphi)}{\varphi}$$

$$= \frac{f'(\varphi)}{\varphi} + (x-\alpha)^2\left\{\frac{f''(\varphi)}{\varphi^2} - \frac{f'(\varphi)}{\varphi^3}\right\}.$$

En ajoutant cette égalité avec celles que l'on obtiendrait en différentiant relativement à y et z, il viendra :

$$\Delta f(\varphi) = 3\frac{f'(\varphi)}{\varphi} + \left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}\left\{\frac{f''(\varphi)}{\varphi^2} - \frac{f'(\varphi)}{\varphi^3}\right\},$$

et finalement cette relation essentielle :

(7) . . . . . $\Delta f(\varphi) = f''(\varphi) + 2\frac{f'(\varphi)}{\varphi}.$

6. On a de même, pour l'expression (6) :

$$\Phi\frac{d\Phi}{dx} = b\,\{b(x-\alpha) - a(y-\beta)\} - c\,\{a(z-\gamma) - c(x-\alpha)\},$$

et comme a, b, c désignent les cosinus des angles d'une droite avec les axes rectangulaires :

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{(1-a^2)(x-\alpha) - ab(y-\beta) - ac(z-\gamma)}{\Phi}.$$

Il vient d'après cela :

$$\frac{df(\Phi)}{dx} = \frac{f'(\Phi)}{\Phi}\left\{(1-a^2)(x-\alpha) - ab(y-\beta) - ac(z-\gamma)\right\},$$

$$\frac{d^2f(\Phi)}{dx^2} = \frac{f'(\Phi)}{\Phi}(1-a^2)$$
$$+ \frac{\Phi f''(\Phi) - f'(\Phi)}{\Phi^3}\left\{(1-a^2)(x-\alpha) - ab(y-\beta) - ac(z-\gamma)\right\}^2.$$

On déduit de là :

$$\Delta f(\Phi) = \frac{f'(\Phi)}{\Phi}(3 - a^2 - b^2 - c^2)$$
$$+ \frac{\Phi f''(\Phi) - f'(\Phi)}{\Phi^3}\left\{\begin{array}{l} [(1-a^2)(x-\alpha) - ab(y-\beta) - ac(z-\gamma)]^2 \\ + [(1-b^2)(y-\beta) - bc(z-\gamma) - ba(x-\alpha)]^2 \\ + [(1-c^2)(z-\gamma) - ca(x-\alpha) - cb(y-\beta)]^2 \end{array}\right\},$$

ou, en développant :

$$\Phi^3\frac{\Delta f(\Phi) - 2\frac{f'(\Phi)}{\Phi}}{\Phi f''(\Phi) - f'(\Phi)} = (x-\alpha)^2\left\{(1-a^2)^2 + a^2c^2 + a^2b^2\right\}$$
$$+ (y-b)^2\left\{(1-b^2)^2 + b^2a^2 + b^2c^2\right\}$$
$$+ (z-c)^2\left\{(1-c^2)^2 + c^2a^2 + c^2b^2\right\}$$
$$- 2ab(x-\alpha)(y-\beta)\left\{(1-a^2) + (1-b^2) - c^2\right\}$$
$$- 2bc(y-\beta)(z-\gamma)\left\{(1-b^2) + (1-c^2) - a^2\right\}$$
$$- 2ca(z-\gamma)(x-\alpha)\left\{(1-c^2) + (1-a^2) - b^2\right\}.$$

Or le coefficient de $(x-\alpha)^2$ se réduit à :

$$1 - 2a^2 + a^2(a^2 + b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire $1 - a^2$. De même celui de $-2ab(x-\alpha)(y-\beta)$ se réduit à $2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ ou l'unité.

L'expression précédente devient ainsi :

$$(x-\alpha)^2(1-a^2)+(y-\beta)^2(1-b^2)+(z-\gamma)^2(1-c^2)$$
$$-2ab(x-\alpha)(y-\beta)-2bc(y-\beta)(z-\gamma)-2ca(z-\gamma)(x-\alpha),$$

c'est-à-dire tout simplement Φ^2.

Il vient par conséquent enfin :

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \Delta f(\Phi)=f''(\Phi)+\frac{f'(\Phi)}{\Phi}.$$

Les formules (7) et (8) présentent, comme on le voit, une grande analogie, mais pourtant elles diffèrent essentiellement par le coefficient du dernier terme.

III

GÉNÉRALISATION.

7. Cherchons maintenant si le même caractère de permanence peut subsister avec plusieurs fonctions typiques $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ au lieu d'une seule, c'est-à-dire s'il peut exister des fonctions telles qu'en les prenant à volonté en nombre quelconque, et sans que le choix d'aucune d'elles oblige en aucune façon à l'emploi de quelque autre, puis s'en servant pour constituer une expression f arbitrairement, les divers augments de f ne renferment que ces mêmes fonctions typiques déjà introduites, et rien autre.

On aura, dans ces conditions :

$$\frac{df(\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots)}{dx}=\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{df}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{df}{d\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx}+\ldots,$$

puis, en différentiant de nouveau :

$$\frac{d^2f(\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\ldots)}{dx^2}=\frac{d^2f}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{d^2f}{d\varphi_1^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2+\frac{d^2f}{d\varphi_2^2}\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)^2+\ldots$$
$$+\frac{df}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{df}{d\varphi_1}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\frac{df}{d\varphi_2}\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}+\ldots$$
$$+2\frac{d^2f}{d\varphi d\varphi_1}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}+2\frac{d^2f}{d\varphi d\varphi_2}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx}+\ldots,$$

et par conséquent :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta f(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots) = & \frac{d^2 f}{d\varphi^2}\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\} \\ & + \frac{d^2 f}{d\varphi_1^2}\left\{\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right\} + \cdots \\ & + \frac{df}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{df}{d\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{df}{d\varphi_2}\Delta\varphi_2 + \cdots \\ & + 2\frac{d^2 f}{d\varphi d\varphi_1}\left\{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz}\right\} + \cdots \end{aligned}\right.$$

Le second membre ne devant dépendre que de φ, φ_1, φ_2, ... quelle que soit la fonction f, il en doit être de même séparément de chacun des coefficients des diverses dérivées partielles de cette fonction. Par exemple $\Delta\varphi$ ne doit dépendre que de φ, φ_1, φ_2, ... Mais il est facile de voir que ce ne peut être que de φ seul. En effet, ces fonctions typiques nous sont provisoirement inconnues, mais sont au fond déterminées. Donc $\Delta\varphi$ ne change pas quand on dispose de f de toutes les manières possibles. Or si l'on fait ce choix en astreignant f à ne contenir que φ, comme le permet l'énoncé du problème, Δf ne doit plus lui-même renfermer que φ et, par suite, il en est de même de $\Delta\varphi$.

Ainsi donc les deux coefficients des dérivées de f relatives à φ seul :

$$\Delta\varphi, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

ne doivent contenir que φ. La recherche précédente établit dès lors que les surfaces représentées par l'équation :

$$\varphi = \text{constante},$$

sont nécessairement des sphères concentriques ou des cylindres de révolution de même axe. Pour le même motif, on reconnaîtra que les surfaces :

$$\varphi_1 = \text{constante},$$

ne peuvent être que des sphères ou des cylindres, avec un centre ou un axe du reste différents de ceux de la famille précédente; et ainsi de suite pour les autres fonctions typiques.

Mais il reste encore à avoir égard aux coefficients de la forme :

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz}.$$

Comme ce facteur affecte une dérivée relative à φ et φ_1 qui ne peut exister que si f renferme à la fois φ et φ_1, ce coefficient peut renfermer lui-même φ et φ_1, mais nulle autre des diverses fonctions typiques, pour le même motif que ci-dessus. Il en sera de même dès lors de la fraction :

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2}},$$

puisque les deux facteurs du dénominateur, d'après ce qui précède, ne dépendent eux-mêmes que de φ et de φ_1. Or cette fraction exprime le cosinus de l'angle sous lequel se rencontrent, en tous les points de leur intersection, les surfaces φ et φ_1. Cet angle doit en conséquence rester constant tout le long de cette ligne.

8. Si, en premier lieu, l'on prend pour φ et φ_1 deux systèmes de sphères concentriques, c'est-à-dire :

$$\varphi^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,$$
$$\varphi_1^2=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2,$$

il est évident que la condition géométrique sera remplie sans nouvelles restrictions.

Il est, du reste, facile de vérifier qu'on a identiquement :

$$(10)\left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz} \\ &=\frac{(x-\alpha)(x-\alpha_1)+(y-\beta)(y-\beta_1)+(z-\gamma)(z-\gamma_1)}{\varphi\varphi_1} \\ &=\frac{\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}+\{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2\}-\{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2+}{2\varphi\varphi_1} \\ &=\frac{\varphi^2+\varphi_1^2-\{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2+(\gamma-\gamma_1)^2\}}{2\varphi\varphi_1}, \end{aligned}\right.$$

expression où x, y, z se sont bien en effet concentrés sous les symboles φ et φ_1.

Si, en second lieu, on envisage deux familles de cylindres de révolution dont chacune est décrite autour d'un même axe, c'est-à-dire deux expressions Φ^2 et Φ_1^2 telles que (6), il est bien clair que la condition ne pourra être remplie que si les axes sont parallèles.

Enfin, si l'on prend à la fois un système de sphères et un de cylindres, il faudra, pour qu'ils se coupent sous un angle constant, que le centre des sphères se trouve placé sur l'axe du cylindre.

9. Lorsque, au lieu de deux fonctions typiques seulement, on en accumule un nombre quelconque, le premier des trois modes précédents permet d'employer, sans aucune restriction, des expressions de la forme :

$$\varphi_k^2=(x-\alpha_k)^2+(y-\beta_k)^2+(z-\gamma_k)^2,$$

dans lesquelles on donne à α_k, β_k, γ_k des valeurs arbitraires différentes de l'une à l'autre.

Le second mode permet également d'employer un nombre quelconque de fonctions Φ_k (6) à l'aide de constantes α_k, β_k, γ_k; a_k, b_k, c_k exprimant la distance du point x, y, z à diverses droites, pourvu que celles-ci soient toutes parallèles. Mais, s'il en est ainsi, il est bien clair que ce ne serait dorénavant qu'une com-

plication sans valeur, de laisser quelconque leur orientation, puisqu'il ne peut plus y en avoir qu'une seule dans la question. Ainsi donc, bien qu'il fût possible, pour peu qu'on le désirât, de continuer ces recherches avec des expressions complètes de la forme (6), il sera plus simple, et au fond tout aussi général, de prendre cette direction pour axe des z et de réduire Φ_k à la forme :

$$\Phi_k = (x - \alpha_k)^2 + (y - \beta_k)^2.$$

Quant au troisième mode, il ne permettrait plus qu'une droite unique avec un certain nombre de centres tous alignés sur sa direction, condition trop restrictive pour laisser un intérêt suffisant à l'examen détaillé de ce cas. Nous nous restreindrons donc aux deux précédents.

10. La formule (9) donne alors pour le premier cas, à l'aide des transformations qui ont été déjà développées (7) et (10) :

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta f = \sum\left(\frac{d^2 f}{d\varphi_k^2}\right) + 2\sum\left(\frac{1}{\varphi_k}\frac{df}{d\varphi_k}\right) \\ \quad + \sum\sum\left\{\frac{1}{\varphi_k\varphi_{k'}}\frac{d^2 f}{d\varphi_k d\varphi_{k'}}\left[\varphi_k^2+\varphi_{k'}^2-(\alpha_k-\alpha_{k'})^2-(\beta_k-\beta_{k'})^2-(\gamma_k-\gamma_{k'})^2\right]\right\}. \end{cases}$$

Pour le second cas, on aurait de même, avec la suppression du coefficient du second terme et celle du dernier carré dans la double somme :

$$(12)\quad \begin{cases} \Delta f = \sum\left(\frac{d^2 f}{d\Phi_k^2}\right) + \sum\left(\frac{1}{\Phi_k}\frac{df}{d\Phi_k}\right) \\ \quad + \sum\sum\left\{\frac{1}{\Phi_k\Phi_{k'}}\frac{d^2 f}{d\Phi_k d\Phi_{k'}}\left[\Phi_k^2+\Phi_{k'}^2-(\alpha_k-\alpha_{k'})^2-(\beta_k-\beta_{k'})^2\right]\right\}. \end{cases}$$

11. Il est clair que les procédés de calcul qui devront découler de ces deux formules fondamentales seront singulièrement simplifiés si le troisième terme en disparaît identiquement; et il suffit pour cela que f soit composé *linéairement* avec des fonctions *distinctes* de φ, de φ_1, de φ_2, ... isolément :

$$(13) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f = \sum\left[F_k(\varphi_k)\right].$$

qui annulent le dénominateur. La première particulièrement n'est pas sans intérêt, car le potentiel de cet ordre donne, quand on l'égale à une constante arbitraire, l'équation des surfaces d'égale teinte pour un système de lumières sans interférences, d'intensités M_k situées en des points α_k, β_k, γ_k.

L'intégration change alors de nature et donne directement :

$$\Delta f = \sum \left(\frac{M_k}{\rho_k^2}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2(F\rho)}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

$$\frac{d(F\rho)}{d\rho} = \operatorname{Log}\rho,$$

$$F\rho = \rho(\operatorname{Log}\rho - 1),$$

$$F = \operatorname{Log}\rho - 1,$$

et enfin :

$$F' = \frac{1}{\rho}.$$

La solution cherchée est donc alors le potentiel de l'attraction en raison inverse de la distance.

La seconde exception $m = -3$ donnerait de même la loi suivante qui est sans intérêt :

$$F = \frac{\operatorname{Log}\rho}{\rho}.$$

16. Cherchons enfin le potentiel capable de se reproduire par son propre augment. Nous poserons pour cela :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2(F\rho)}{d\rho^2} = F,$$

$$\frac{d^2(F\rho)}{d\rho^2} - (F\rho) = 0,$$

$$F\rho = Ae^{\rho} + Be^{-\rho},$$

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{Ae^{\rho} + Be^{-\rho}}{\rho},$$

expression qui jouera plus loin un rôle important.

où la densité μ est une fonction arbitraire de ξ, η, ζ, et la triple intégration s'étendant aux limites qui comprennent le corps (*). Mais nous conserverons la notation précédente comme plus simple et comme comprenant plus clairement le cas des points isolés, sans obliger à envisager une densité nulle dans tout l'espace et infinie sur ces points.

Les formules (14) et (15) étant différentes, il semble que cette étude doive actuellement se diviser en deux embranchements distincts destinés à suivre l'une et l'autre dans ses conséquences. Nous commencerons par étudier l'équation (14) qui se rapporte au cas le plus important, celui de l'espace à trois dimensions. Puis nous parviendrons à donner aux résultats une extension qui permettra d'y renfermer, comme un cas particulier, celui de la géométrie plane auquel se rapporte la seconde relation.

DEUXIÈME PARTIE

Fonctions de trois variables.

IV

AUGMENT DU PREMIER ORDRE.

12. Je ferai d'abord remarquer que l'expression fondamentale (14) peut se mettre sous cette forme plus condensée :

$$(17) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Delta f = \sum \left[\frac{1}{\varphi_k} \frac{d^2 (F_k \varphi_k)}{d\varphi_k^2} \right],$$

comme il est aisé de le vérifier en effectuant cette double différentiation.

(*) Je me borne à rappeler que lorsque, dans le cas d'un corps continu, le point attiré fait partie de ce corps, il y a lieu d'apporter une attention spéciale, suivant la forme de la fonction caractéristique F, à la portion infiniment voisine. Ce sont des questions classiques sur lesquelles nous n'avons pas à nous arrêter d'une manière particulière dans la recherche actuelle.

13. Comme application de cette formule, cherchons l'expression la plus générale du potentiel dont l'augment est nul :

$$\Delta f = 0,$$

$$\sum \left[\frac{1}{\varphi_k} \frac{d^2 (F_k \varphi_k)}{d\varphi_k^2} \right] = 0.$$

Comme chaque variable φ_k figure, pour un potentiel, dans un terme séparé affecté d'un coefficient M_k qui doit rester arbitraire dans la recherche de la loi d'attraction, l'équation devra avoir lieu pour chaque terme isolément, ce qui conduit à poser :

$$\frac{d^2 (F\varphi)}{d\varphi^2} = 0,$$

$$F\varphi = A + B\varphi,$$

$$F = \frac{A}{\varphi} + B.$$

Il est clair, d'ailleurs, que l'addition de la constante B est sans intérêt, puisque $F(\varphi)$ désigne l'intégrale de la loi d'attraction. On peut donc s'en tenir à

$$F = \frac{A}{\varphi},$$

et l'on obtient, comme solution unique, le potentiel de la gravitation.

J'insisterai une fois pour toutes sur la circonstance qui vient de se produire et se répétera dans tous les problèmes sur le potentiel, à savoir la disparition du signe Σ, avec substitution de la fonction caractéristique F du potentiel au potentiel lui-même f. J'effectuerai donc dorénavant cette transformation sans en répéter les motifs.

14. Comme second problème, cherchons le potentiel qui a pour augment un autre potentiel donné *à priori*, d'ordre quelconque m entier ou fractionnaire, positif ou négatif, correspondant à l'attraction suivant la puissance $m - 1$ de la distance.

Nous posons pour cela :

$$\Delta f = \sum (M_k \varphi_k^m).$$

Les masses M_k étant arbitraires devront être les mêmes pour les deux potentiels, et l'on devra poser en outre (17) :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2(F\varphi)}{d\varphi^2} = \varphi^m,$$

d'où, en chassant φ et intégrant deux fois:

$$F\varphi = \frac{\varphi^{m+3}}{(m+2)(m+3)} + A + B\varphi,$$

$$F = \frac{\varphi^{m+2}}{(m+2)(m+3)} + \frac{A}{\varphi} + B.$$

L'addition d'une constante et d'un potentiel isotherme est ici toute naturelle, puisque l'augment de cette partie est, pour son compte, identiquement nul. Mais, pour ce motif même, on peut la sous-entendre, et réduire la solution essentielle au potentiel dont l'ordre est supérieur de deux unités à celui du proposé, et dont les masses, sans changer de situation, sont réduites dans le rapport de l'unité à $(m + 2)(m + 3)$.

Si, en particulier, on cherche un potentiel dont l'augment soit constant, il faudra faire $m = 0$, d'où $m + 2 = 2$. On obtient ainsi le potentiel de l'attraction en raison directe de la distance, que Lamé appelait *le second potentiel* (*). Il n'est autre chose que le moment central d'inertie, ou encore la moitié de la somme des moments d'inertie relatifs à trois axes rectangulaires.

15. Il est toutefois nécessaire de remarquer que deux exceptions échapperont à la règle générale, pour chacune des deux hypothèses :

$$m = -2, \qquad m = -3,$$

(*) LAMÉ, *Théorie de l'élasticité*, p. 71.

qui annulent le dénominateur. La première particulièrement n'est pas sans intérêt, car le potentiel de cet ordre donne, quand on l'égale à une constante arbitraire, l'équation des surfaces d'égale teinte pour un système de lumières sans interférences, d'intensités M_k situées en des points α_k, β_k, γ_k.

L'intégration change alors de nature et donne directement :

$$\Delta f = \sum \left(\frac{M_k}{\rho_k^2} \right),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 (F\rho)}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

$$\frac{d (F\rho)}{d\rho} = \text{Log}\, \rho ,$$

$$F\rho = \rho (\text{Log}\, \rho - 1),$$

$$F = \text{Log}\, \rho - 1,$$

et enfin :

$$F' = \frac{1}{\rho} .$$

La solution cherchée est donc alors le potentiel de l'attraction en raison inverse de la distance.

La seconde exception $m = -3$ donnerait de même la loi suivante qui est sans intérêt :

$$F = \frac{\text{Log}\, \rho}{\rho} .$$

16. Cherchons enfin le potentiel capable de se reproduire par son propre augment. Nous poserons pour cela :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 (F\rho)}{d\rho^2} = F,$$

$$\frac{d^2 (F\rho)}{d\rho^2} - (F\rho) = 0,$$

$$F\rho = Ae^{\rho} + Be^{-\rho},$$

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{Ae^{\rho} + Be^{-\rho}}{\rho},$$

expression qui jouera plus loin un rôle important.

V

AUGMENTS D'ORDRES SUPÉRIEURS.

17. L'augment d'ordre n est représenté directement par la formule suivante :

$$(19) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \Delta^n f = \sum \left[\frac{1}{\varphi_k} \frac{d^{2n}(F_k \varphi_k)}{d\varphi_k^{2n}} \right].$$

Pour l'établir sans entrer ici dans les développements qui m'y ont conduit, il suffira, puisque cette relation se vérifie pour le premier ordre (17), de montrer que, si elle est vraie pour la valeur n, elle l'est par cela même pour $n+1$.

Invoquons pour cela la formule (17), et remarquons que, par la constitution linéaire de la fonction f, chaque terme subit pour son propre compte les opérations de l'augment. Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f &= \sum_k \left[\Delta^{n+1} F_k\right] \\
&= \sum_k \left[\Delta(\Delta^n F_k)\right] \\
&= \sum_k \left\{ \frac{1}{\varphi_k} \frac{d^2\left[\varphi_k(\Delta^n F_k)\right]}{d\varphi_k^2} \right\} \\
&= \sum_k \left\{ \frac{1}{\varphi_k} \frac{d^2\left[\varphi_k \cdot \frac{1}{\varphi_k} \frac{d^{2n}(F_k\varphi_k)}{d\varphi_k^{2n}}\right]}{d\varphi_k^2} \right\} \\
&= \sum_k \left[\frac{1}{\varphi_k} \frac{d^{2(n+1)}(F_k\varphi_k)}{d\varphi_k^{2(n+1)}} \right],
\end{aligned}$$

ce qui reproduit la même expression dans laquelle n est changé en $n+1$.

18. Comme application de la formule générale (19), reprenons, pour un ordre quelconque, les trois problèmes qui ont été traités pour le premier ordre.

Cherchons, en premier lieu, un potentiel dont le n^e augment soit nul :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}}=0,$$

$$F\varphi = c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + \cdots + c_{2n-1}\varphi^{2n-1},$$

$$(20) \quad . \; . \; . \; F = \frac{c_0}{\varphi} + c_1 + c_2\varphi + c_3\varphi^2 + \cdots + c_{2n-1}\varphi^{2n-2}.$$

Les deux premiers termes correspondent au potentiel qui a son premier augment nul (13) et par conséquent aussi tous les autres. Les deux termes suivants fournissent le potentiel qui a son second augment nul, sans le premier, et par conséquent aussi ceux qui suivent. Il est donc naturel que tous ces termes soient accumulés dans l'expression générale. Mais si, pour plus de précision, on spécifie le potentiel qui a son n^e augment nul ***sans les précédents***, il sera fourni par les deux derniers termes pris à part :

$$F = A\varphi^{2n-3} + B\varphi^{2n-2}.$$

Si, par exemple, on demande un potentiel qui ait son second augment nul, mais non le premier, il viendra, en faisant $n = 2$

$$F = A\varphi + B\varphi^2,$$
$$f = \sum(A_k\varphi_k) + \sum(B_k\varphi_k^2),$$

c'est-à dire les potentiels de l'attraction constante et de l'attraction en raison directe de la distance.

En ce qui concerne le dernier de ces deux potentiels, cette propriété avait été déjà signalée par Lamé (*) qui lui avait attaché une véritable importance, comme permettant d'intégrer en termes finis l'équation différentielle $\Delta\Delta n = 0$, qui régit les déplacements élastiques.

(*) Lamé, *Théorie de l'élasticité*, p. 71.

19. Si l'on demande, en second lieu, une fonction dont le n^e augment reproduise un potentiel donné d'ordre m, on fera :

$$\sum\left[\frac{1}{\varphi_k}\frac{d^{2n}(F_k\varphi_k)}{d\varphi_k^{2n}}\right]=\sum(M_k\varphi_k^m),$$

$$\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}}=\varphi^{m+1}.$$

Nous pouvons, dans l'intégration, omettre toutes les constantes qui ajouteraient à la solution essentielle du problème tout le polynôme (20), lequel doit en effet y figurer, puisque son propre augment est nul pour l'ordre en question. Il vient, en nous restreignant ainsi :

$$F\varphi=\frac{\varphi^{m+2n+1}}{(m+2)(m+3)\dots(m+2n+1)},$$

$$F=\frac{\varphi^{m+2n}}{(m+2)(m+3)\dots(m+2n+1)}.$$

Je ne m'arrêterai pas d'ailleurs aux $2n$ exceptions qui annulent les facteurs du dénominateur, et obligent à effectuer directement les intégrations (*).

(*) Indépendamment de la question que nous venons de traiter pour le potentie *algébrique*, rien n'empêche d'en imaginer d'autres quelconques ayant pour caractéristique une fonction transcendante $\psi(\varphi)$ de la distance. On se trouvera ainsi ramené à l'équation différentielle :

$$\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}}=\varphi\psi,$$

d'où l'on dégagera F au moyen de $2n$ quadratures superposées ou isolées par l'emploi de l'intégration par parties.

Si, par exemple, on demande le potentiel qui reproduit par son n^e augment le potentiel logarithmique (de l'attraction en raison inverse de la distance) :

$$\Delta^n f=\Sigma(M_k\operatorname{Log}\varphi_k),$$

on trouve :

$$F=\frac{\varphi^{2n}}{1.2.3.4\dots(2n+1)}\left[\operatorname{Log}\varphi-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\dots+\frac{1}{2n+1}\right)\right].$$

20. Cherchons enfin le potentiel qui se régénère lui-même par son n^e augment. Nous devons écrire pour cela :

$$\sum\left[\frac{1}{\varphi_k}\frac{d^{2n}(F_k\varphi_k)}{d\varphi_k^{2n}}\right]=f=\sum(F_k).$$

L'égalité devant d'ailleurs avoir lieu terme pour terme à cause des arbitraires, nous poserons :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}}=F,$$

$$\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}}-(F\varphi)=0,$$

équation linéaire qui a pour intégrale :

$$(21)\quad\ldots\ldots\quad F=\frac{1}{\varphi}\sum_{i=0}^{i=2n-1}\left[C_i e^{\varphi e^{\frac{i\pi\sqrt{-1}}{n}}}\right],$$

expression qu'il est du reste aisé de débarrasser de ses imaginaires.

Cette formule mérite d'être remarquée en passant comme donnant en même temps l'intégrale générale de cette équation différentielle plus compliquée :

$$(22)\quad\ldots\quad\frac{d^{2n}F}{d\varphi^{2n}}+\frac{2n}{\varphi}\frac{d^{2n-1}F}{d\varphi^{2n-1}}-F=0;$$

c'est ce qui résulte d'une propriété générale de l'augment d'ordre supérieur que je vais maintenant établir.

21. Cette propriété consiste dans la formule générale :

$$(23)\quad\ldots\quad\Delta^n f=\sum\left(\frac{d^{2n}F_k}{d\varphi_k^{2n}}\right)+2n\sum\left(\frac{1}{\varphi^k}\frac{d^{2n-1}F_k}{d\varphi_k^{2n-1}}\right),$$

qui fournit une seconde expression directe du n^e augment diffé-

rente de la précédente (19), chacune des deux présentant des avantages particuliers.

Pour la démontrer je dis d'abord que l'on a identiquement :

$$(24) \quad \ldots\ldots \frac{d^i(F\varphi)}{d\varphi^i} = \varphi F_i + iF_{i-1},$$

en représentant par F_i et F_{i-1} les dérivées de F d'ordres i et $i - 1$. Cette formule est d'abord évidente pour $i = 1$. Il suffit donc, en l'admettant pour une valeur quelconque i, de montrer qu'elle aura lieu par cela seul pour l'ordre suivant. On a, en effet :

$$\frac{d^{i+1}(F\varphi)}{d\varphi^{i+1}} = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{d^i(F\varphi)}{d\varphi^i}\right]$$
$$= \frac{d}{d\varphi}[\varphi F_i + iF_{i-1}]$$
$$= \varphi F_{i+1} + (i + 1)F_i,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant on remplace dans cette identité (24) i par $2n$, elle devient :

$$\frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}} = \varphi F_{2n} + 2nF_{2n-1},$$

c'est-à-dire :

$$F_{2n} + \frac{2n}{\varphi} F_{2n-1} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^{2n}(F\varphi)}{d\varphi^{2n}},$$

ce qui établit l'équation (23), si on la compare à l'expression (19)(*).

(*) M. Gilbert m'a fait remarquer que l'on peut déduire immédiatement l'équation (23) de la formule (19) en développant, dans cette dernière, la $2n^e$ dérivée du produit $F_K\varphi_K$ à l'aide de la formule connue de Leibnitz :

$$\frac{d^m(uv)}{d\varphi^m} = v\frac{d^m u}{d\varphi^m} + m\frac{dv}{d\varphi}\frac{d^{m-1}u}{d\varphi^{m-1}} + \cdots$$

VI

GÉNÉRALISATION ELLIPSOÏDALE.

22. On peut rattacher à l'augment ordinaire (1), que nous désignons par Δ, cette opération plus générale :

$$P \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d^2}{dy^2} + R \frac{d^2}{dz^2},$$

que nous représenterons par δ et dans laquelle P, Q, R désignent trois coefficients arbitraires mais fixes. Cet algorithme joue également un rôle important dans les recherches de physique mathématique. Par exemple, le résultat de l'opération δ est identiquement nul quand on l'applique à l'expression de la température d'un corps cristallisé en équilibre thermique, rapporté à ses axes principaux de conductibilité. Il en est de même pour la fonction qui remplace la dilatation cubique quand les élasticités directes, suivant l'expression de M. de Saint-Venant (*), se distribuent ellipsoïdalement par moyennes géométriques. En outre, les déplacements moléculaires satisfont dans le même cas à la condition $\delta\delta n = 0$. Cette équation différentielle a formé, comme la relation analogue $\Delta\Delta n = 0$, l'objet d'une étude approfondie de M. E. Matthieu (**).

Toute la théorie précédente subsistera sans altération si l'on substitue à l'expression (9) la suivante introduite par M. de Saint-Venant dans les recherches de cet ordre :

$$\varphi^2 = \frac{(x-\alpha)^2}{P} + \frac{(y-\beta)^2}{Q} + \frac{(z-\gamma)^2}{R}.$$

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. VIII, p. 367.

(**) *Ibidem*, 2e série, t. XV, p. 117.

Il vient, en effet :

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{x-\alpha}{P\varphi},$$

$$\frac{dF(\varphi)}{dx}=F'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx}=F'(\varphi)\frac{x-\alpha}{P\varphi},$$

$$\frac{d^2F(\varphi)}{dx^2}=F''(\varphi)\frac{d\varphi}{dx}\frac{x-\alpha}{P\varphi}-\frac{F'(\varphi)(x-\alpha)}{P\varphi^2}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{F'(\varphi)}{P\varphi}$$

$$=\frac{F'(\varphi)}{P\varphi}+\frac{(x-\alpha)^2}{P^2}\left\{\frac{F''(\varphi)}{\varphi^2}-\frac{F'(\varphi)}{\varphi^3}\right\},$$

$$(25)\quad \delta F=3\frac{F'(\varphi)}{\varphi}+\left\{\frac{(x-\alpha)^2}{P}+\frac{(y-\beta)^2}{Q}+\frac{(z-\gamma)^2}{R}\right\}\left\{\frac{F''(\varphi)}{\varphi^2}-\frac{F'(\varphi)}{\varphi^3}\right\}$$

$$=F''(\varphi)+2\frac{F'(\varphi)}{\varphi}.$$

Nous retrouvons ainsi sans altération la formule (14), et par suite tous les développements ultérieurs dont elle a été le point de départ.

TROISIÈME PARTIE

Fonctions d'un nombre quelconque de variables.

VII

AUGMENT DU PREMIER ORDRE.

22. Nous pouvons encore apporter un nouveau degré de généralisation en envisageant l'opération suivante, que je continuerai à appeler augment et à représenter par la caractéristique δ. Le nombre des variables, au lieu d'être spécialement de trois, x, y, z, devient quelconque et égal à p :

$$\delta=P_1\frac{d^2}{dx_1^2}+P_2\frac{d^2}{dx_2^2}+P_3\frac{d^2}{dx_3^2}+\cdots+P_p\frac{d^2}{dx_p^2}.$$

Les p coefficients fixes sont arbitraires et resteront ici quelconques, bien que leur valeur la plus intéressante soit évidemment l'unité.

On suppose cette opération appliquée à une fonction quelconque de l'expression suivante :

$$(26)\quad \psi^2 = \frac{(x_1 - \alpha_1)^2}{P_1} + \frac{(x_2 - \alpha_2)^2}{P_2} + \frac{(x_3 - \alpha_3)^2}{P_3} + \cdots + \frac{(x_p - \alpha_p)^2}{P_p},$$

où figurent, outre les p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_p$ et les p coefficients fixes $P_1, P_2, \ldots P_p$, p constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$.

Plus généralement même, nous supposons la fonction f formée, non pas seulement avec une fonction typique ψ, mais à l'aide d'un nombre quelconque de ces fonctions typiques différant les unes des autres par leurs constantes arbitraires :

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_p, \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \ldots & \alpha'_p, \\ \alpha''_1 & \alpha''_2 & \alpha''_3 & \ldots & \alpha''_p, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

La généralisation que nous abordons dans cette troisième partie présentera en particulier cet intérêt de rattacher au cas de l'espace à trois dimensions $p = 3$, qui nous a occupés jusqu'ici, celui de la géométrie plane $p = 2$.

Les opérations vont devenir, en raison de cette extension, assez complexes, et je crois pouvoir sans inconvénient les simplifier par une sorte de sous-entendu. On a pu reconnaître surabondamment jusqu'ici que lorsque dans l'expression f figuraient plusieurs fonctions typiques $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, le calcul finissait toujours par porter uniquement sur les fonctions composantes $F_k(\varphi_k)$, et non sur f lui-même. Je crois donc pouvoir, sans nuire à la clarté, supprimer dorénavant les indices k et les signes Σ qui constituent le passage de F à f, en opérant directement sur F lui-même. Ces signes supprimés, qui devront toujours être sous-

entendus, risqueraient de rendre illisibles des formules que leur nature rendra assez difficile à écrire avec clarté, même après cet allègement.

24. Le calcul du n° 22 se reproduira évidemment de la même manière, sauf au moment où l'on ajoute par la pensée le résultat des différentiations relatives aux p variables distinctes, ce qui donnera, au lieu de (25) :

$$\delta F = p \frac{F'(\psi)}{\psi} + \left\{ \frac{(x_1 - \alpha_1)^2}{P_1} + \frac{(x_2 - \alpha_2)^2}{P_2} + \dots + \frac{(x_p - \alpha_p)^2}{P_p} \right\} \left\{ \frac{F''(\psi)}{\psi^2} - \frac{F'(\psi)}{\psi^3} \right\},$$

et, en réduisant :

$$(27) \quad \dots \quad \delta F = F''(\psi) + (p - 1) \frac{F'(\psi)}{\psi}.$$

25. Comme application, cherchons en premier lieu un potentiel (je continue à employer ce nom pour les fonctions de p variables) dont l'augment soit nul. Il vient pour cela :

$$\frac{F''(\psi)}{F'(\psi)} + \frac{p-1}{\psi} = 0,$$

$$\log F'(\psi) = A - (p-1)\log\psi,$$

$$F'(\psi) = \frac{B}{\psi^{p-1}},$$

$$F(\psi) = \frac{C}{\psi^{p-2}} + D;$$

la solution est donc le potentiel d'ordre $2 - p$.

C'est ainsi que, pour les fonctions de trois variables, le potentiel isotherme est d'ordre -1, relatif, par suite, à la gravitation.

Il faut toutefois faire une exception pour le cas de $p = 2$ qui correspond précisément à deux variables, ou à ce que Lamé nom-

mait le potentiel cylindrique. L'intégration change alors de nature et donne :

$$F'(\psi) = \frac{B}{\psi},$$

$$F(\psi) = B \log \psi ;$$

c'est alors le potentiel logarithmique, relatif à l'attraction en raison inverse de la simple distance.

26. Pour aller plus loin, nous mettrons l'équation (27) sous une forme plus condensée. Faisons d'abord pour simplifier :

$$p - 1 = q.$$

La formule :

$$\delta F = F'' + q \frac{F'}{\psi},$$

pourra s'écrire identiquement :

$$(28) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta F = \frac{1}{\psi^q} \frac{d}{d\psi} (\psi^q F').$$

27. Cherchons, comme seconde application, l'expression qui a pour augment un potentiel donné d'ordre m :

$$\frac{1}{\psi^q} \frac{d}{d\psi} (\psi^q F') = \psi^m,$$

$$\psi^q F' = \frac{\psi^{m+q+1}}{m + q + 1},$$

$$F = \frac{\psi^{m+2}}{(m + 2)(m + q + 1)}.$$

La solution consiste donc dans le potentiel correspondant d'ordre supérieur de deux unités, quel que soit le nombre $q + 1$

des variables, ce dernier ne figurant que dans le facteur constant par lequel il faut diviser toutes les masses.

28. Cherchons encore le potentiel de $q+1$ variables qui se régénère lui-même par son augment. La formule (27) donnera pour cette recherche :

$$(29) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F''(\psi) + q\,\frac{F'(\psi)}{\psi} - F(\psi) = 0.$$

Cette équation différentielle est bien connue des géomètres. Elle se présente dans beaucoup de recherches de mécanique ou de physique mathématique. Dans le cas actuel, q désigne essentiellement un nombre entier et positif.

Si l'on suppose d'abord $q=1$, c'est-à-dire une fonction de deux variables, elle a pour intégrale générale :

$$(30) \qquad F(\psi) = \int_0^{\pi} (e^{\psi\cos\omega} + e^{-\psi\cos\omega})\left[A + B\log(\psi\sin^2\omega)\right] d\omega.$$

Pour $q=2$, c'est-à-dire pour une fonction de trois variables, l'intégrale est la suivante :

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(\psi) = \frac{Ae^{\psi} + Be^{-\psi}}{\psi},$$

que nous avons trouvée directement (18).

Si q est supérieur à 2, l'intégrale générale prend la forme :

$$F(\psi) = \Psi \,.\left[A + B\int \frac{d\psi}{\psi^q \Psi^2}\right],$$

en désignant par l'abréviation Ψ la série suivante :

$$\Psi = 1 + \frac{\psi^2}{2(q+1)} + \frac{\psi^4}{2.4(q+1)(q+3)} + \frac{\psi^6}{2.4.6(q+1)(q+3)(q+5)} + \cdots$$

Lorsque q est un nombre pair, c'est-à-dire quand il s'agit

d'une fonction d'un nombre impair de variables, on peut employer de préférence la forme :

$$F(\psi)=\psi^{1-q}\left\{\begin{aligned}&(Ae^{\psi}+Be^{-\psi})\left[1+\frac{q-4}{q-3}\cdot\frac{\psi^2}{1.2}+\frac{(q-4)(q-6)(q-8)}{(q-3)(q-4)(q-5)}\cdot\frac{\psi^4}{1.2.3.4}\right.\\&\qquad\left.+\frac{(q-4)(q-6)(q-8)(q-10)(q-12)}{(q-3)(q-4)(q-5)(q-6)(q-7)}\cdot\frac{\psi^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots\right]\\&-(Ae^{\psi}-Be^{-\psi})\left[\psi+\frac{(q-4)(q-6)}{(q-3)(q-4)}\cdot\frac{\psi^3}{1.2.3}+\frac{(q-4)(q-6)(q-8)(q-10)}{(q-3)(q-4)(q-5)(q-6)}\frac{\psi^5}{1.2.3.4.5}\right.\\&\qquad\left.+\frac{(q-4)(q-6)(q-8)(q-10)(q-12)(q-14)}{(q-3)(q-4)(q-5)(q-6)(q-7)(q-8)}\frac{\psi^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots\right]\end{aligned}\right\}$$

qui est composée d'un nombre limité de termes et débarrassée de tout signe de quadrature (*).

29. Il existe en outre une manière assez élégante de passer de la solution de ce problème supposée trouvée pour $q+1$ variables au cas de $q+3$. Elle consiste dans la relation

$$(32)\quad\ldots\ldots\quad F_{q+2}=\frac{1}{\psi}\,\frac{dF_q}{d\psi},$$

en convenant spécialement qu'après les opérations indiquées par le second membre, ψ ne représente plus la même expression qu'auparavant, celle-ci devant être alors complétée par l'addition de deux termes de plus (26).

Pour le faire voir commençons par écrire :

$$(33)\quad\ldots\ldots\quad \frac{d^2F_q}{d\psi^2}+\frac{q}{\psi}\,\frac{dF_q}{d\psi}-F_q=0,$$

(*) On pourrait traiter de même, ainsi que dans les paragraphes précédents, la recherche d'un potentiel qui se régénère *sauf un facteur constant* par un de ses augments. L'équation différentielle peut encore s'intégrer. Mais je supprime ces développements.

puisque F_q est supposé satisfaire à l'équation (29). Nous tirons d'ailleurs de l'égalité (32), en la différentiant deux fois :

$$\frac{dF_{q+2}}{d\psi} = \frac{1}{\psi}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} - \frac{1}{\psi^2}\frac{dF_q}{d\psi},$$

$$\frac{d^2F_{q+2}}{d\psi^2} = \frac{1}{\psi}\frac{d^3F_q}{d\psi^3} - \frac{2}{\psi^2}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} + \frac{2}{\psi^3}\frac{dF_q}{d\psi}.$$

Il s'ensuit identiquement (32) :

$$\frac{d^2F_{q+2}}{d\psi^2} + \frac{q+2}{\psi}\frac{dF_{q+2}}{d\psi} - F_{q+2}$$

$$= \left\{\frac{1}{\psi}\frac{d^3F_q}{d\psi^3} - \frac{2}{\psi^2}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} + \frac{2}{\psi^3}\frac{dF_q}{d\psi}\right\} + \frac{q+2}{\psi}\left\{\frac{1}{\psi}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} - \frac{1}{\psi^2}\frac{dF_q}{d\psi}\right\} - \frac{1}{\psi}\frac{dF_q}{d\psi}$$

$$= \frac{1}{\psi}\frac{d^3F_q}{d\psi^3} + \frac{q}{\psi^2}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} - \left(\frac{q}{\psi^3} + \frac{1}{\psi}\right)\frac{dF_q}{d\psi}.$$

Or, si nous différentions l'équation (33), elle donne :

$$\frac{d^3F_q}{d\psi^3} + \frac{q}{\psi}\frac{d^2F_q}{d\psi^2} - \left(\frac{q}{\psi^2} + 1\right)\frac{dF_q}{d\psi} = 0.$$

Ce dernier second membre est donc nul et, par suite, il vient :

$$\frac{d^2F_{q+2}}{d\psi^2} + \frac{q+2}{\psi}\frac{dF_{q+2}}{d\psi} - F_{q+2} = 0.$$

On voit donc que l'expression (32) satisfait bien, comme il a été énoncé, à l'équation différentielle (33) dans laquelle q aurait été changé en $q + 2$.

La relation (32) étant ainsi établie peut s'appliquer consécutivement un nombre quelconque de fois. Si donc $F_{1,2}$ désigne par abréviation soit l'expression (30), soit (31) suivant que q est impair ou pair (c'est-à-dire p pair ou impair), on pourra écrire :

$$(34)\quad F_q = \frac{1}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left\{\frac{1}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left[\frac{1}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\cdots\left[\frac{1}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\psi}\frac{dF_{1,2}}{d\psi}\right)\right]\cdots\right)\right]\right\},$$

avec $\frac{q-1}{2}$ ou $\frac{q-2}{2}$ différentiations successives.

Actuellement faisons, pour abréger :

$$\frac{1}{\psi^{q+2}}\frac{d\mu}{d\psi}=\theta,$$

d'où (40) :

$$\psi^q\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\psi^q}\frac{d\lambda}{d\psi}\right)=\psi^{q+1}\theta.$$

La dernière équation devient par là :

$$\frac{1}{\psi^q}\frac{d}{d\psi}(\psi^{q+1}\theta)=\psi\frac{d\theta}{d\psi}+(q+1)\theta,$$

et, enfin :

$$\frac{d}{d\psi}(\psi^{q+1}\theta)=(q+1)\,\psi^q\theta+\psi^{q+1}\frac{d\theta}{d\psi},$$

ce qui est une identité, comme il s'agissait de le faire voir.

NOTES

SUR

LA TÊTE D'UN FŒTUS

DE *BALÆNOPTERA SIBBALDII* (GRAY)

PAR

M. l'abbé Gérard SMETS

Docteur en sciences,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

Le musée de l'Université de Louvain possédait depuis 1876, conservée dans l'alcool, la tête d'un embryon de *Balænoptera Sibbaldii* (¹) provenant de Vadsö, petite ville du golfe de Varanger, où l'on pêche régulièrement cette ptérobaleine.

Grâce à l'obligeance de M. le professeur Van Beneden, j'ai eu l'occasion d'examiner en détail cette intéressante pièce.

La tête avait une longueur de 40 centimètres et une largeur maximum de 30 centimètres dans la région temporale. Elle présentait une forme presque triangulaire, la face supérieure aplatie, caractères distinctifs des Balénoptères. Nous possédons également l'atlas et le corps de l'axis de notre individu.

(¹) Outre les grands ouvrages de cétologie, on peut consulter :

Turner, *Proc. Zool. Societ.*; 1865.

Turner, *Transactions of the royal Society of Edinburgh*, vol. XXVI; 1870.

Reinhardt, *Nogle Bemoerkeringer om Isloendernes Steypireydr;* 1868.

Sars, *Om Blaahvalen;* 1874.

Sars, *Bidrag tiel en niere characteristik af vore Bardehvaler;* 1878

Julius Munter, *Balænoptera Sibbaldii;* Greifswald, 1877.

H. de Beauregard, *Étude de l'articulation temporo-maxillaire dans les Balénoptères.*

F.-H. Troschels, *Archiv fur Naturgeschichte.* Jahrgang 41, Heft 3, pp. 338-386; Berlin, 1875.

L'état de conservation du fœtus ne permettait guère que l'étude de la partie squelettique : le périoste et le périchondre étaient détachés de l'os ou du cartilage, ou s'en détachaient aisément. On ne pouvait, dans ces conditions, étudier les insertions musculaires qu'approximativement. Néanmoins j'ai tenu à vérifier et à confirmer, autant qu'il était possible, les observations que la cétologie doit à M. de Beauregard (1) sur les muscles de la mandibule de la *Balænoptera Sibbaldii* et des Balénoptérides en général, ainsi que sur l'articulation temporo-maxillaire.

En tenant compte de la différence d'âge des fœtus que nous examinions, je n'ai consigné aucune différence notable. Ce savant d'ailleurs met dans tous ses travaux une exactitude et une précision remarquables.

Trois faisceaux superposés de fibres musculaires constituent le masséter :

a) Un faisceau superficiel, attaché à la face externe de la mandibule, passe au-dessous du jugal et s'insère à la face inférieure du sus-maxillaire ;

b) Un faisceau moyen descend du bord externe et antérieur de l'apophyse articulaire du temporal, où il est attaché, à la face externe et au bord inférieur de la mandibule « en avant et un peu en dedans du faisceau superficiel, à une certaine distance en arrière de l'apophyse coronoïde » (2). Nous avons à faire observer que ce faisceau s'insérait dans notre fœtus à la hauteur de l'apophyse coronoïde.

Ces deux faisceaux sont triangulaires;

c) Le faisceau profond du masséter, le plus épais dans les deux fœtus, s'attache en haut au bord inférieur et à la face interne de l'apophyse articulaire de temporal, en bas au bord supérieur de la mâchoire inférieure, derrière l'apophyse coronoïde et à la base même de celle-ci.

Le muscle *temporal*, très volumineux, s'attache sur toute la surface de l'apophyse coronoïde — qui est élevée et pointue

---

(1) H. de Beauregard, *Journal de l'anatomie et de la physiologie*.
(2) *Ibid.*

dans cette espèce, — en l'enveloppant intégralement; en haut ses fibres s'étalent sur la partie supérieure de la fosse temporale.

Le ménisque interarticulaire de l'articulation temporo-maxillaire était encore peu développé. Comme M. de Beauregard, nous n'avons trouvé, malgré l'attention la plus soutenue, des traces que d'une seule cavité synoviale, la supérieure. Eschricht, comme on le sait, en a signalé une seconde dans la *Balæna mysticetus*. Cette baleine, qui semble avoir fait son apparition si tardivement, se rapproche d'ailleurs sous beaucoup de rapports bien plus des Mammifères terrestres que les Ptérobaleines.

La surface articulaire du temporal n'avait pas encore pris sa forme définitive; il n'y avait pas encore d'apparence de *surface* glénoïde; bien plus, l'apophyse articulaire du temporal était encore arrondie. Il est possible qu'elle se creuse sous l'influence de la pression du condyle articulaire.

En tenant compte de la longueur des muscles, de leur direction, de leur insertion et de la disposition de l'articulation temporo-maxillaire, on voit que la mandibule peut s'abaisser au point de former avec le rostre un angle presque droit. On a parfois constaté cet abaissement sur des Balénoptères vivantes.

La partie squelettique du crâne n'était encore que partiellement ossifiée.

Le corps de l'axis et l'atlas étaient encore attenants aux condyles occipitaux.

Le corps de l'axis entièrement cartilagineux présente les apophyses transverses inférieures bien développées et, à sa face antérieure, le prolongement central de son corps que beaucoup d'auteurs continuent à nommer apophyse odontoïde.

Il est vrai, comme M. Van Beneden le montre pour des Mystacocètes d'Anvers, cette apophyse correspond fonctionnellement à l'odontoïde : le cou plus long de certains fossiles, des surfaces articulaires sur la face caudale de leur atlas et sur l'apophyse centrale de l'axis montrent que la tête de ces animaux devait effectuer des mouvements de rotation autour de cette apophyse,

Actuellement faisons, pour abréger :

$$\frac{1}{\psi^{q+2}}\frac{d\mu}{d\psi} = \theta,$$

d'où (40) :

$$\psi^q \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\psi^q}\frac{d\lambda}{d\psi}\right) = \psi^{q+1}\theta.$$

La dernière équation devient par là :

$$\frac{1}{\psi^q}\frac{d}{d\psi}(\psi^{q+1}\theta) = \psi\frac{d\theta}{d\psi} + (q+1)\theta,$$

et, enfin :

$$\frac{d}{d\psi}(\psi^{q+1}\theta) = (q+1)\,\psi^q\theta + \psi^{q+1}\frac{d\theta}{d\psi},$$

ce qui est une identité, comme il s'agissait de le faire voir.

NOTES

SUR

LA TÊTE D'UN FŒTUS

DE *BALÆNOPTERA SIBBALDII* (GRAY)

PAR

M. l'abbé Gérard SMETS

Docteur en sciences,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

Le musée de l'Université de Louvain possédait depuis 1876, conservée dans l'alcool, la tête d'un embryon de *Balænoptera Sibbaldii* (¹) provenant de Vadsö, petite ville du golfe de Varanger, où l'on pèche régulièrement cette ptérobaleine.

Grâce à l'obligeance de M. le professeur Van Beneden, j'ai eu l'occasion d'examiner en détail cette intéressante pièce.

La tête avait une longueur de 40 centimètres et une largeur maximum de 30 centimètres dans la région temporale. Elle présentait une forme presque triangulaire, la face supérieure aplatie, caractères distinctifs des Balénoptères. Nous possédons également l'atlas et le corps de l'axis de notre individu.

(¹) Outre les grands ouvrages de cétologie, on peut consulter :

TURNER, *Proc. Zool. Societ.*; 1865.

TURNER, *Transactions of the royal Society of Edinburgh*, vol. XXVI; 1870.

REINHARDT, *Nogle Bemoerkeringer om Isloendernes Steypireydr;* 1868.

SARS, *Om Blaahvalen;* 1874.

SARS, *Bidrag tiel en niere characteristik af vore Burdehvaler;* 1878

JULIUS MUNTER, *Balænoptera Sibbaldii;* Greifswald, 1877.

H. DE BEAUREGARD, *Étude de l'articulation temporo-maxillaire dans les Balénoptères.*

F.-H. TROSCHELS, *Archiv fur Naturgeschichte.* Jahrgang 41, Heft 3, pp. 338-386; Berlin, 1875.

L'état de conservation du fœtus ne permettait guère que l'étude de la partie squelettique : le périoste et le périchondre étaient détachés de l'os ou du cartilage, ou s'en détachaient aisément. On ne pouvait, dans ces conditions, étudier les insertions musculaires qu'approximativement. Néanmoins j'ai tenu à vérifier et à confirmer, autant qu'il était possible, les observations que la cétologie doit à M. de Beauregard (1) sur les muscles de la mandibule de la *Balœnoptera Sibbaldii* et des Balénoptérides en général, ainsi que sur l'articulation temporo-maxillaire.

En tenant compte de la différence d'âge des fœtus que nous examinions, je n'ai consigné aucune différence notable. Ce savant d'ailleurs met dans tous ses travaux une exactitude et une précision remarquables.

Trois faisceaux superposés de fibres musculaires constituent le masséter :

a) Un faisceau superficiel, attaché à la face externe de la mandibule, passe au-dessous du jugal et s'insère à la face inférieure du sus-maxillaire ;

b) Un faisceau moyen descend du bord externe et antérieur de l'apophyse articulaire du temporal, où il est attaché, à la face externe et au bord inférieur de la mandibule « en avant et un peu en dedans du faisceau superficiel, à une certaine distance en arrière de l'apophyse coronoïde » (2). Nous avons à faire observer que ce faisceau s'insérait dans notre fœtus à la hauteur de l'apophyse coronoïde.

Ces deux faisceaux sont triangulaires;

c) Le faisceau profond du masséter, le plus épais dans les deux fœtus, s'attache en haut au bord inférieur et à la face interne de l'apophyse articulaire de temporal, en bas au bord supérieur de la mâchoire inférieure, derrière l'apophyse coronoïde et à la base même de celle-ci.

Le muscle *temporal*, très volumineux, s'attache sur toute la surface de l'apophyse coronoïde — qui est élevée et pointue

---

(1) H. DE BEAUREGARD, *Journal de l'anatomie et de la physiologie.*
(2) *Ibid.*

dans cette espèce, — en l'enveloppant intégralement; en haut ses fibres s'étalent sur la partie supérieure de la fosse temporale.

Le ménisque interarticulaire de l'articulation temporo-maxillaire était encore peu développé. Comme M. de Beauregard, nous n'avons trouvé, malgré l'attention la plus soutenue, des traces que d'une seule cavité synoviale, la supérieure. Eschricht, comme on le sait, en a signalé une seconde dans la *Balæna mysticetus*. Cette baleine, qui semble avoir fait son apparition si tardivement, se rapproche d'ailleurs sous beaucoup de rapports bien plus des Mammifères terrestres que les Ptérobaleines.

La surface articulaire du temporal n'avait pas encore pris sa forme définitive; il n'y avait pas encore d'apparence de *surface* glénoïde; bien plus, l'apophyse articulaire du temporal était encore arrondie. Il est possible qu'elle se creuse sous l'influence de la pression du condyle articulaire.

En tenant compte de la longueur des muscles, de leur direction, de leur insertion et de la disposition de l'articulation temporo-maxillaire, on voit que la mandibule peut s'abaisser au point de former avec le rostre un angle presque droit. On a parfois constaté cet abaissement sur des Balénoptères vivantes.

La partie squelettique du crâne n'était encore que partiellement ossifiée.

Le corps de l'axis et l'atlas étaient encore attenants aux condyles occipitaux.

Le corps de l'axis entièrement cartilagineux présente les apophyses transverses inférieures bien développées et, à sa face antérieure, le prolongement central de son corps que beaucoup d'auteurs continuent à nommer apophyse odontoïde.

Il est vrai, comme M. Van Beneden le montre pour des Mystacocètes d'Anvers, cette apophyse correspond fonctionnellement à l'odontoïde : le cou plus long de certains fossiles, des surfaces articulaires sur la face caudale de leur atlas et sur l'apophyse centrale de l'axis montrent que la tête de ces animaux devait effectuer des mouvements de rotation autour de cette apophyse,

comme les autres Mammifères en exécutent autour de l'axe de l'odontoïde (1).

Dans le *Platanista*, les deux apophyses semblent coexister; c'est ce qu'il nous parait d'après la région cervicale d'un individu que nous avons pu examiner.

L'odontoïde véritable y existe; mais l'apophyse centrale de l'axis s'applique sur lui et s'y soude. Leur ensemble constitue donc ce que l'on appelle l'apophyse odontoïde de ces animaux. Nous ignorons s'il en est de même dans les *Inia* et les *Pontoporia*, comme nous n'oserions pas dire avec certitude si la disposition que nous avons observée est une anomalie ou un fait général. S'il en était ainsi, nous posséderions la transition de l'axis des autres Mammifères à celui des Cétacés.

Vers la base de l'axis de notre fœtus, à 1 centimètre du bord, il y a une dépression; les cellules y présentent au microscope un autre aspect et leur coloration est différente; nous croyons que ce sont les derniers vestiges de la notocorde. Celle-ci ne serait donc pas centrale au corps de la vertèbre.

Le corps de l'atlas, cartilagineux, montre ses deux apophyses transverses bien développées. L'ossification de la vertèbre a débuté par l'apparition d'un point osseux dans les pédicules de l'arc neural. L'ossification s'avance vers le corps de la vertèbre et vers la ligne médiane de l'arc supérieur. Comme on l'observe d'ailleurs dans tous les Mammifères, la partie ossifiée de chaque côté est discoïde.

Les neurapophyses de l'atlas sont précédées d'un arc cartilagineux, indépendant d'elles. Entre cet arc et les neurapophyses, l'artère vertébrale pénètre dans l'intérieur par un véritable canal, tandis que dans divers atlas adultes de cette espèce ce foramen n'est pas clos à la face antérieure dans le squelette sec. Cet arc cartilagineux semble donc ne pas s'ossifier totalement et peut-être pas du tout. On pourrait croire que cet arc est le dernier

(1) « Die Drehbewegungen des Kopfsfinden zwischen Atlas und Epistropheus, um die Axe des Zahnfortsatzes, statt, die Beugebewegung dagegen im Atlanto-occipital Gelenk. » Dr Wiedersheim, *Lehrbuch der Vergleichenden Anatomie*, erster Theil, p. 72.

plus loin, en parlant de la partie axile du crâne, les particularités de l'ethmoïde.

Les os nasaux sont très développés dans cette espèce.

La disposition relative des intermaxillaires et des maxillaires, à la partie supérieure de la face, n'offre rien de particulier.

A sa partie inférieure et latérale, le maxillaire supérieur est très spongieux : c'est à peine si l'on peut dire qu'on a affaire à un os. Cette partie du squelette de l'animal adulte est perforée d'une trentaine de trous de chaque côté, pour le passage de différents nerfs et de vaisseaux.

Le lacrymal, placé entre l'apophyse orbitaire du frontal et le maxillaire supérieur, est un os allongé, mince à son bord postérieur. Il s'est développé dans les membranes qui séparent ces deux os et nous ne lui avons pas trouvé d'autre adhérence.

Dans les têtes de *Balænoptera musculus* et de *Balænoptera rostrata,* que nous avons eu l'occasion d'étudier à Louvain et à Bruxelles, on voit, en arrière du lacrymal, également entre l'apophyse frontale et le sus-maxillaire, des masses latérales de l'ethmoïde encore cartilagineuses. De la sorte, les rapports du lacrymal avec les autres parties du squelette sont exactement les mêmes que dans les Géothériens. Nous constatons également, par notre fœtus, que cet os s'ossifie indépendamment des ethmoïdes et que leur adhérence n'est que secondaire.

Revenons à la partie axile du crâne. L'occipital basilaire (figure 2), comme nous le disions, commence entre les condyles occipitaux par un prolongement pointu. Le reste de son corps est carré et massif et porte deux masses latérales séparées du corps par une gouttière longitudinale.

Entre le basioccipital et le corps du sphénoïde postérieur, il existe un cartilage parfaitement comparable à un disque intervertébral. Le même cartilage existe dans les crânes de *Balæna mysticetus* et de *Balænoptera rostrata,* que M. Van Beneden représente dans l'*Ostéographie des cétacés.*

Le corps du sphénoïde présente à peine la selle turcique ; ses ailes commencent par un pédicule aminci reposant sur une

Ceux-ci se composent de deux os latéraux et d'un interpariétal. Ce dernier est peu développé en longueur et en largeur; son épaisseur, mince dans ses contours, va en augmentant jusqu'à son centre, où elle est considérable.

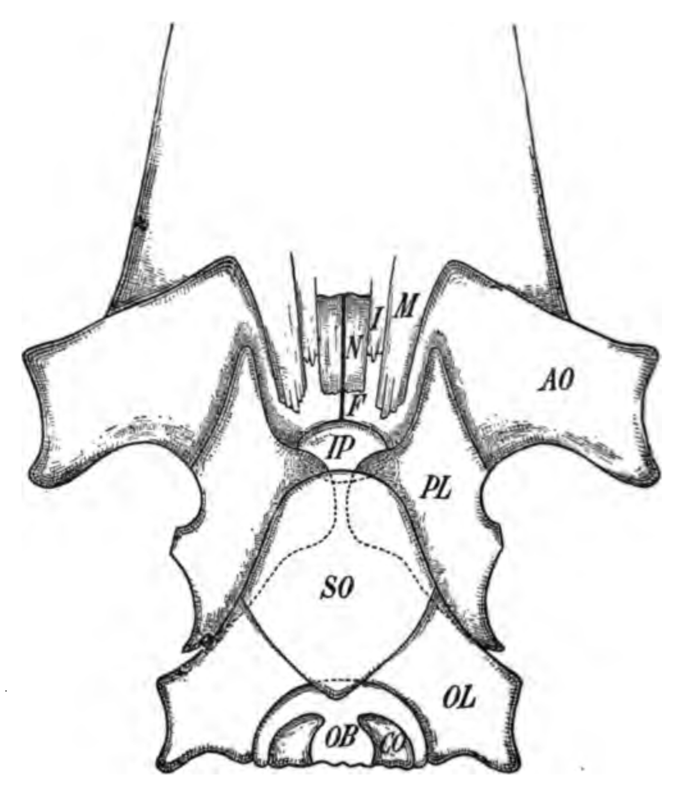


Fig. 1. — *Balænoptera Sibbaldii* (Gray).

Les points indiquent l'extension d'os recouverts par d'autres.

OB. — Occipital basilaire.
CO. — Condyle occipital.
OL. — Exoccipital.
SO. — Sus-occipital.
PL. — Pariétal latéral.
IP. — Interpariétal.
F. — Frontal.
AO — Apophyse orbitaire du frontal.
N. — Nasal.
M. — Maxillaire supérieur.
I. — Intermaxillaire.

Il est recouvert latéralement par les pariétaux latéraux et en arrière par le sus-occipital, qui les recouvre tous les trois. Il est probable que, par leur extension, dans la suite, les pariétaux

latéraux se réunissent sur la ligne médiane sur l'interpariétal. Dans les Mystacocètes vivants, à l'âge adulte, l'occipital supérieur envahit les pariétaux — qui ne sont plus visibles que dans leur partie latérale — et il se soude aux trois pariétaux.

L'homologie de l'interpariétal n'est pas douteuse; cependant l'on constate une certaine différence avec le même os des autres Vertébrés. Les pariétaux latéraux ici refoulent l'interpariétal dans l'intérieur de la cavité crânienne; que si le sus-occipital est soudé avec lui dans l'animal adulte, c'est surtout médiatement par les pariétaux latéraux.

Par le volume du cerveau, par l'épaisseur de la paroi de la cavité crânienne, les Mystacocètes sont encore des types anciens; ils le sont cependant moins que les espèces fossiles, où ces deux caractères archaïques sont singulièrement exagérés. Dans ces espèces fossiles, les pariétaux étaient encore visibles derrière le frontal, comme dans les Mystacocètes actuels à l'âge embryonnaire; mais les deux os symétriques se réunissaient sur la ligne médiane. Les auteurs qui ont décrit les ossements fossiles de Mystacocètes ne parlent pas de l'interpariétal. En examinant le sus-occipital de ces espèces éteintes, on peut constater parfaitement qu'il n'est pas soudé à l'interpariétal; de plus, les pariétaux latéraux se rejoignent dans la ligne médiane sur une certaine épaisseur. L'interpariétal était-il refoulé encore plus profondément dans la cavité crânienne? Existait-il un interpariétal? Nous comprendrions la réduction et même la disparition d'un os, mais l'adjonction d'un nouveau, dans ces conditions, ne serait pas en rapport avec la marche de l'évolution des êtres à travers les âges.

Si l'on compare les pariétaux de notre jeune individu avec les mêmes os des Mystacocètes fossiles, on est frappé de leur grande ressemblance, même dans des genres très éloignés des *Balænoptera*, comme les Plésiocètes ([1]).

Le développement du crâne des Cétacés à fanons, surtout en

([1]) Van Beneden, *Annales du Musée d'histoire naturelle de Belgique*, t. IX, pl. XIII, fig. 2.

ce qui regarde les os de recouvrement, confirme la loi formulée par Pictet ([1]) que l'ordre d'apparition des divers types d'animaux sur la surface de la terre rappelle souvent les phases du développement embryonnaire : lentement à travers les âges, le crâne ([2]) de ces Cétacés se développe en largeur, tandis que le diamètre longitudinal diminue proportionnellement; le sus-occipital envahit de plus en plus le pariétal et le frontal.

Ce chevauchement progressif de l'occipital supérieur, tant dans l'*ontogénie* que dans la *phylogénie,* indique que la distance entre les os nasaux et le bord de cet occipital ne peut être considérée comme un caractère générique, mais tout au plus comme un caractère spécifique.

Les frontaux de notre fœtus se réunissent sur la ligne médiane; leur épaisseur, derrière les os nasaux, est d'un peu plus d'un centimètre. Ils forment la partie antérieure et latérale de la cavité crânienne. A une hauteur correspondant à celle où s'insère la petite apophyse orbitaire de l'*Otaria jubata,* naît la grande apophyse frontale qui refoule l'œil si loin. Sa partie inférieure est creusée en gouttière et loge le nerf optique. Il y a une double communication de l'intérieur de la cavité crânienne avec cette gouttière optique, d'abord par la gouttière passant sur l'aile du sphénoïde postérieur et ensuite par l'orifice propre du nerf optique, orifice percé dans l'orbito-sphénoïde rudimentaire. L'atrophie presque totale de ce dernier os trouve sa raison d'être dans l'extension des frontaux derrière les os nasaux et les maxillaires supérieurs ([3]) et limitant ainsi la partie antérieure de la cavité du crâne.

Dans l'échancrure des frontaux sur la ligne médiane, au devant du présphénoïde, se trouve une apophyse cartilagineuse; ce ne peut être que la *crista-galli* de l'ethmoïde. Nous décrirons

---

([1]) PICTET, *Traité de paléontologie*, 2e édit., 1853.

([2]) VAN BENEDEN et P. GERVAIS, *Ostéographie des Cétacés*, p. 270. — FLOWER, *On Whales past and present* (Discours in the Royal Institution, 1883).

([3]) On sait, comme on l'observe parfaitement dans notre fœtus, que, dans les Mystacocètes, les frontaux s'articulent avec les nasaux et les maxillaires par suture écailleuse.

fères terrestres. On peut lui trouver plus d'une analogie avec le même organe des poissons.

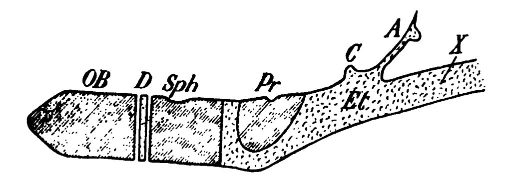


Fig. 4. — *Balænoptera Sibbaldii* (Gray).

Coupe longitudinale de l'axe du crâne.

OB. — Occipital basilaire.
Sph. — Corps du sphénoïde.
D. — Disque cartilagineux.
Pr. — Présphénoïde.
Et. — Ethmoïde.
C. — Apophyse crista-galli.
A. — Apophyse ethmoïdale post-nasale
X — Cordon ethmoïdal.

Le souffle des Baleines consiste en vapeur d'eau, en un peu d'eau pulvérisée et de matières grasses. L'origine de l'eau pulvérisée est encore douteuse; elle peut provenir de la condensation de la vapeur d'eau éliminée par les poumons; mais l'eau de mer ne pénétrerait-elle pas dans les narines, et l'organe dont il est question ne pourrait-il pas servir à apprécier la qualité de cette eau? On sait que ces animaux fuient les eaux corrompues, et que les marins pour les mettre en fuite pompent l'eau de la cale.

Au devant du présphénoïde, il n'existe plus de point d'ossification ; il est néanmoins certain que l'ossification progressera. Y aura-t-il plus tard un nouveau point d'ossification, comme le suppose M. Paul Gervais, pour cette partie du crâne? Nous en doutons. Si l'on examine les coupes que l'on possède de la tête de différents Cétacés, on constate :

1° Que l'ossification de cette partie du crâne s'avance d'arrière en avant;

2° Qu'il est toujours impossible de trouver une véritable ligne de démarcation entre le présphénoïde et l'ethmoïde.

Que si un centre d'ossification faisait son apparition, il apparaîtrait, comme toujours, au centre ou vers le centre de l'os et non à sa partie postérieure.

échancrure du ptérygoïdien; leurs parties terminales, élargies et bien développées, ne sont pas encore coossifiées avec le temporal et le pariétal. Il ne semble exister qu'un seul point d'ossification pour cet os et ses ailes.

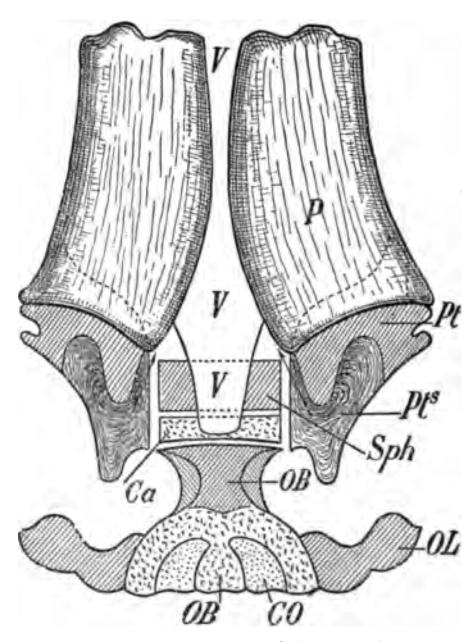


Fig. 2. — *Balænoptera Sibbaldii* (Gray).

Crâne vu d'en bas.

CO. — Condyle occipital.
OB. — Occipital basilaire.
OL. — Exoccipital.
Sph — Corps du sphénoïde.
Ca. — Cartilage.
P. — Palatin.
Pt^s. — Ptérygoïdien (sinus).
V. — Vomer.
Pt. — Ptérygoïdien.

Le sphénoïde postérieur est séparé du présphénoïde par du cartilage en haut, tandis qu'à la partie basale le cartilage persiste encore sous la partie ossifiée du présphénoïde : celui-ci n'est donc ossifié que dans sa partie supérieure intracrânienne. Les orbitosphénoïdes sont très peu développés.

Ni à la partie supérieure, ni à la face inférieure, nous ne voyons aucune ligne de démarcation entre le présphénoïde et



L'ethmoïde latéral envoie, disions-nous, une petite apophyse en dessous de l'apophyse orbitaire du frontal en avant du canal du nerf optique. Dans les Ziphioïdes on rencontre à cette place un os considéré par plusieurs cétologistes comme l'os lacrymal. Ne serait-ce pas un prolongement analogue de l'ethmoïde latéral? Si des parties homologues du squelette sont cartilagineuses dans une espèce, osseuses dans une autre, on peut remarquer souvent que ce dernier cas se rencontre quand ces parties ne sont plus protégées, comme ailleurs, sur toutes leurs faces, par des pièces osseuses.

Cet os lacrymal des Ziphioïdes a-t-il un point d'ossification particulier? Ses rapports avec les autres os ne sont pas non plus complètement ceux du même os dans les autres Vertébrés. Eschricht figure déjà, à côté de ce lacrymal douteux de l'Hyperoodon, une lame osseuse de l'ethmoïde.

Le vomer des Ptérobaleines, contrairement à celui des Balénides, est creusé en gouttière arrondie à sa base. Cet os prend, dans les Mystacocètes, son origine dans la région sphénoïdale et s'avance jusque vers la pointe du rostre. Il loge et protège la partie axile du crâne. Arrivé aux narines qui passent à côté de lui, il s'élève, contourne l'ethmoïdal et forme la cloison inférieure des fosses nasales et s'applique plus ou moins contre l'apophyse ethmoïdale post-nasale.

Dans la *Balœnoptera rostrata,* il ne s'élève que jusqu'à la hauteur des ethmoïdes latéraux. Il serait intéressant d'examiner comment, dans la *Balœnoptera Sibbaldii* adulte, le vomer se comporte vis-à-vis de l'organe de l'olfaction. Dans notre fœtus, il n'a pas encore commencé à entourer l'ethmoïdal.

Cet os n'est pas encore soudé aux sphénoïdes dans notre embryon ; il reste visible à la partie inférieure de la tête entre les palatins et les maxillaires.

Le vomer n'a pas toujours reçu des ostéologistes la place qui lui revient; c'est un os de recouvrement impair; il protège la partie basilaire du crâne. Nous ne pouvons nous empêcher de le comparer aux os chevrons que nous trouvons dans la région caudale.

Cet organe est encore peu connu et même ignoré. On lit dans le *Traité de zoologie,* de M. C. Claus : « Le nez (des Cétacés), par suite de l'absence du nerf olfactif, ne joue plus le rôle d'organe de l'olfaction et sert uniquement à livrer passage à l'air nécessaire à la respiration » ([1]).

Comme cet organe de la *Balænoptera Sibbaldii,* à notre connaissance, n'a pas encore été décrit ni figuré, nous avons jugé utile de le représenter (figure 3).



Fig. 3. — Cartilage ethmoïdal latéral de la *Balænoptera Sibbaldii* (Gray).
On voit la grande cloison médiane de l'organe de l'olfaction, et les autres cloisons irrégulièrement disposées.

L'ethmoïde de la *Balænoptera rostrata* porte ce cartilage latéral beaucoup plus haut; il est bien au-dessus du cordon axial et dépend de la lame ethmoïdale post-nasale.

Les Mystacocètes apprécient-ils par cet organe la qualité de l'air, comme les Géothériens, ou apprécient-ils la qualité de l'air dissous dans l'eau, ou plutôt la qualité de l'eau, comme les poissons ?

Cet organe ne semble pas affecté à apprécier la nature de l'air; en effet, ses cloisons sont peu nombreuses, elles sont épaisses; en somme, l'organe ne présente pas cette délicatesse, si on peut parler ainsi, de l'organe de l'olfaction des Mammi-

---

([1]) *Traité de Zoologie,* par C. CLAUS, traduction par G. MOQUIN-TANDON, p. 1472; Paris, 1884.

fères terrestres. On peut lui trouver plus d'une analogie avec le même organe des poissons.

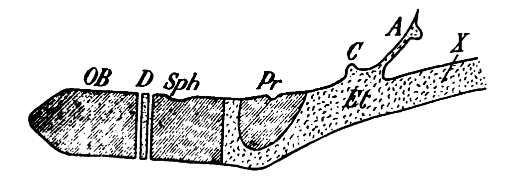


Fig. 4. — *Balænoptera Sibbaldii* (Gray).

Coupe longitudinale de l'axe du crâne.

OB. — Occipital basilaire.
Sph. — Corps du sphénoïde.
D. — Disque cartilagineux.
Pr. — Présphénoïde.
Et. — Ethmoïde.
C. — Apophyse crista-galli.
A. — Apophyse ethmoïdale post-nasale
X — Cordon ethmoïdal.

Le souffle des Baleines consiste en vapeur d'eau, en un peu d'eau pulvérisée et de matières grasses. L'origine de l'eau pulvérisée est encore douteuse; elle peut provenir de la condensation de la vapeur d'eau éliminée par les poumons; mais l'eau de mer ne pénétrerait-elle pas dans les narines, et l'organe dont il est question ne pourrait-il pas servir à apprécier la qualité de cette eau? On sait que ces animaux fuient les eaux corrompues, et que les marins pour les mettre en fuite pompent l'eau de la cale.

Au devant du présphénoïde, il n'existe plus de point d'ossification ; il est néanmoins certain que l'ossification progressera. Y aura-t-il plus tard un nouveau point d'ossification, comme le suppose M. Paul Gervais, pour cette partie du crâne? Nous en doutons. Si l'on examine les coupes que l'on possède de la tête de différents Cétacés, on constate :

1° Que l'ossification de cette partie du crâne s'avance d'arrière en avant ;

2° Qu'il est toujours impossible de trouver une véritable ligne de démarcation entre le présphénoïde et l'ethmoïde.

Que si un centre d'ossification faisait son apparition, il apparaîtrait, comme toujours, au centre ou vers le centre de l'os et non à sa partie postérieure.

M. Paul Gervais ([1]) dit : « Il reste des traces de la séparation primitive de ces deux pièces (présphénoïde et ethmoïde), en avant de l'aire transversale saillante, qui précède elle-même la gouttière optique du présphénoïde ».

Mais, en cet endroit, le cartilage de notre embryon, et ce fait peut être général pour tous les Cétacés, était beaucoup plus spongieux qu'ailleurs; l'os, remplaçant progressivement le cartilage, traduit les caractères de ce dernier. Cette observation montre comment ce savant a pu être induit en erreur. D'ailleurs, à la face inférieure, il est complètement impossible de trouver une séparation quelconque entre ces os.

Il est toujours difficile, surtout dans les Cétacés, d'assigner les véritables limites de ces os, puisque ce n'est pas tant la nature, que le naturaliste, qui les sépare et les distingue.

L'ossification du cordon cartilagineux axial ne fait pas beaucoup de progrès dans les Mystacocètes, tandis que dans les Ziphioïdes, tant vivants que fossiles, elle s'avance progressivement jusque vers l'extrémité du vomer, ce qui donne une très grande solidité au rostre.

L'apophyse *crista-galli,* les lames criblées confondues ici avec les cornets olfactifs indiquent positivement que le cartilage au devant du présphénoïde est le corps de l'ethmoïde. La lame postnasale est encore une dépendance du même élément; elle a été reconnue, comme telle, par le docteur Julius Munter (*Balænoptera Sibbaldii,* 1877) : « Ich nahm, dit-il, die Nasenbeine aus » den vorragenden Siebbeinplatten heraus..... Die Siebbeine » konnten nicht zur näheren Untersuchungen gezogen werden. »

Le cartilage qui continue l'axe du corps, et que M. P. Gervais appelle le *sus-vomérien,* est le prolongement du corps de l'ethmoïde et on pourrait parfaitement le nommer *cordon ou os ethmoïdal,* selon qu'il est cartilagineux ou osseux, en réservant le nom de *corps de l'ethmoïde* à la partie axile qui porte les différentes apophyses.

([1]) P. GERVAIS, *Remarques sur l'anatomie de la division des Balénidés.*

L'ethmoïde latéral envoie, disions-nous, une petite apophyse en dessous de l'apophyse orbitaire du frontal en avant du canal du nerf optique. Dans les Ziphioïdes on rencontre à cette place un os considéré par plusieurs cétologistes comme l'os lacrymal. Ne serait-ce pas un prolongement analogue de l'ethmoïde latéral? Si des parties homologues du squelette sont cartilagineuses dans une espèce, osseuses dans une autre, on peut remarquer souvent que ce dernier cas se rencontre quand ces parties ne sont plus protégées, comme ailleurs, sur toutes leurs faces, par des pièces osseuses.

Cet os lacrymal des Ziphioïdes a-t-il un point d'ossification particulier? Ses rapports avec les autres os ne sont pas non plus complètement ceux du même os dans les autres Vertébrés. Eschricht figure déjà, à côté de ce lacrymal douteux de l'Hyperoodon, une lame osseuse de l'ethmoïde.

Le vomer des Ptérobaleines, contrairement à celui des Balénides, est creusé en gouttière arrondie à sa base. Cet os prend, dans les Mystacocètes, son origine dans la région sphénoïdale et s'avance jusque vers la pointe du rostre. Il loge et protège la partie axile du crâne. Arrivé aux narines qui passent à côté de lui, il s'élève, contourne l'ethmoïdal et forme la cloison inférieure des fosses nasales et s'applique plus ou moins contre l'apophyse ethmoïdale post-nasale.

Dans la *Balænoptera rostrata,* il ne s'élève que jusqu'à la hauteur des ethmoïdes latéraux. Il serait intéressant d'examiner comment, dans la *Balænoptera Sibbaldii* adulte, le vomer se comporte vis-à-vis de l'organe de l'olfaction. Dans notre fœtus, il n'a pas encore commencé à entourer l'ethmoïdal.

Cet os n'est pas encore soudé aux sphénoïdes dans notre embryon ; il reste visible à la partie inférieure de la tête entre les palatins et les maxillaires.

Le vomer n'a pas toujours reçu des ostéologistes la place qui lui revient; c'est un os de recouvrement impair; il protège la partie basilaire du crâne. Nous ne pouvons nous empêcher de le comparer aux os chevrons que nous trouvons dans la région caudale.

La partie antérieure de l'axe du corps est protégée aussi bien que la partie postérieure; si le vomer commence dans la région rachidienne et se prolonge au devant du cerveau, de même les os en V commencent dans la région rachidienne et se prolongent au delà de la terminaison de la moelle épinière.

Ce qui confirme cette interprétation, c'est la démonstration, faite récemment par M. Dollo ([1]), de l'homologie des chevrons et des hypapophyses. Ainsi on peut dire que, primitivement et théoriquement, la partie axile du squelette supporte inférieurement des os de recouvrement, disparaissant presque constamment dans la région dorsale.

Dans les essais que l'on a faits pour ramener les os du crâne à un nombre déterminé de vertèbres, on voit parfois intervenir le vomer. M. Owen indique cet os comme le centrum de la vertèbre nasale ou blénencéphalique ; c'est une erreur à tout point de vue. Pour les vertèbres occipitale, pariétale et frontale d'Owen, le centrum est respectivement l'occipital basilaire, le corps du sphénoïde et le présphénoïde, toutes parties axiles. Pour sa quatrième vertèbre, Owen aurait dû prendre la continuation de ces centres, l'ethmoïde avec le cartilage *ethmoïdal.*

L'homologie du vomer dans les Vertébrés est très douteuse ; nous ne sommes pas loin de croire que le parasphénoïde de beaucoup de vertébrés inférieurs n'est que l'homologue du vomer. L'un et l'autre recouvrent la partie basilaire du crâne, en dedans des palatins et des ptérygoïdiens.

La seule différence qu'ils présentent, c'est leur extension dans le sens caudal.

Dans les *Bovinæ,* le vomer s'étend déjà jusque sous le présphénoïde; dans les Cétacés, comme notre embryon l'indique si bien, il s'étend jusque sous le corps du sphénoïde. Le parasphénoïde s'étend jusque sous la région occipito-basilaire.

Les os décrits comme les vomers de ces vertébrés inférieurs peuvent avoir une autre signification.

Les ptérygoïdiens et les palatins, dans notre embryon, mon-

([1]) Communication faite à la *Société scientifique* de Bruxelles le 14 avril 1885.

trent que leur ossification est due à un point d'ossification particulier à chacun.

Les palatins sont très larges et recouvrent partiellement les ptérygoïdiens. Leur bord externe (figure 5) s'étend verticalement à sa partie antérieure et postérieure, tandis que le bord interne est mince.



Fig. 5. — Bord externe du palatin.

A, à la partie anterieure. | *P*, à la partie postérieure.

Le ptérygoïdien, appliqué par une échancrure sur l'alisphénoïde, présente intérieurement une large gouttière, oblique par rapport à l'axe du crâne, pour loger les arrière-fosses nasales. Sa partie postérieure montre le *hamulus pterygoidius* très développé et le grand sinus à air, percé d'un orifice mettant en communication le tympanal et les fosses nasales.

En comparant la disposition relative des palatins et des ptérygoïdiens des Mystacocètes, on constate des différences notables, qui permettent de reconnaître l'espèce à première vue. On sait quel heureux parti M. Flower a tiré de ces os pour la classification des Delphinides; depuis longtemps déjà M. Van Beneden a attiré l'attention des naturalistes sur la disposition relative des mêmes os dans les Mystacocètes.

L'os tympanique, le périotique et le temporal demandent une étude comparée; nous n'avons pas les matériaux pour la faire. Une description détaillée n'aurait aucun intérêt scientifique.

Nous devons ajouter que nous n'avons pas trouvé de vestige du mastoïdien. Le rocher porte les deux apophyses caractéristiques des Mystacocètes ; mais, à en juger d'après notre embryon,

la grande apophyse du rocher n'est pas l'homologue de l'apophyse mastoïde ou plutôt du mastoïdien ; c'est simplement, semblerait-il, une dépendance du périotique.

Les branches du maxillaire inférieur sont complètement ossifiées. Ce qui frappe d'abord en examinant cet os, c'est le développement de l'apophyse coronoïde, développement en rapport avec le volume du muscle temporal.

Le sillon dentaire est largement ouvert depuis l'origine de chaque branche jusqu'à une certaine distance de l'apophyse coronoïde. Dans l'une des branches, on pouvait apercevoir, vers la fin du sillon dentaire, les derniers vestiges de deux dents fœtales presque résorbées.

Le condyle occupe la moitié supérieure de la face postérieure de la branche; il est séparé de la moitié inférieure par une gouttière transversale assez profonde.

Le tubercule inférieur est séparé en deux parties par une gouttière verticale mais moins accentuée.

L'orifice du canal dentaire arrondi, la courbure de la mandibule n'offrent rien de particulier. Les trous mentonniers n'étaient pas encore formés.

En terminant, qu'il nous soit permis d'exprimer notre gratitude à notre vénéré maître, M. Van Beneden, qui nous a confié le crâne de la Balénoptère.

SUR

LA RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES

DE L'INTÉGRALE

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F}};$$

PAR

M. le Cte de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

Dans une note parue dans le tome VIII des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* j'ai examiné le cas où la quantité sous le radical a toutes ses racines réelles, et j'ai indiqué une méthode permettant, lorsqu'il en est ainsi, d'arriver au résultat d'une façon assez simple, sans être obligé de retenir les formules.

Je me propose aujourd'hui de résoudre un problème analogue pour le cas où la quantité sous le radical a des racines imaginaires.

J'examinerai d'abord le cas où la quantité sous le radical est du quatrième degré; je passerai ensuite à celui où elle est du troisième. Enfin, pour ce dernier cas où la quantité sous le radical est du troisième degré, je reviendrai aussi sur l'hypothèse où toutes les racines sont réelles. J'indiquerai dans cette hypothèse un moyen de réduction, dont j'avais déjà dit quelques mots dans la note rappelée plus haut, et qui conduit plus vite au résultat que lorsqu'on regarde ce cas comme la limite de celui où la quantité sous le radical est du quatrième degré et où l'une des racines croît indéfiniment.

D'ailleurs, ainsi que je le disais en commençant, ce que je me propose c'est moins de donner des formules applicables à tous les cas que d'exposer une méthode qui permet dans chaque cas d'arriver simplement au résultat et cela sans qu'il soit nécessaire de recourir aux formules.

I

La quantité sous le radical est du 4[e] degré et a au moins deux racines imaginaires.

Soit donc l'intégrale

$$(1) \quad \ldots \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm\left[(x-a)^2+b\right]\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}},$$

a, b, α et β étant réels et b pouvant être positif ou négatif.

Il est bien entendu d'ailleurs que l'on ne peut prendre le signe — devant le premier facteur que si b est négatif, car si l'on prenait le signe — lorsque b est positif l'intégrale serait imaginaire pour toute valeur réelle de x et nous supposons expressément que x aussi bien que l'intégrale sont réelles.

Pour faire la réduction nous poserons

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad x-\alpha=\beta \operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1),$$

où φ_1 désigne une constante arbitraire que nous déterminerons plus loin.

L'équation (2) donne

$$dx=\frac{\beta d\varphi}{\cos^2(\varphi+\varphi_1)},$$

et l'intégrale (1) devient

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm\left[\left[(\alpha-a)\cos(\varphi+\varphi_1)+\beta\sin(\varphi+\varphi_1)\right]^2+b\cos^2(\varphi+\varphi_1)\right]}};$$

en développant le carré elle deviendra

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm\left[\frac{1}{2}\left[(\alpha-a)^2+\beta^2+b\right]+\frac{1}{2}\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]\cos 2(\varphi+\varphi_1)+(\alpha-a)\beta\sin 2(\varphi+\varphi_1)\right]}}.$$

La quantité entre crochets sous le radical peut s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[(\alpha-a)^2+\beta^2+b\right]+\frac{1}{2}\left[\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]\cos 2\varphi_1+2(\alpha-a)\beta\sin 2\varphi_1\right]\cos 2\varphi \\ +\frac{1}{2}\left[2(\alpha-a)\beta\cos 2\varphi_1-\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]\sin 2\varphi_1\right]\sin 2\varphi. \end{array}\right.$$

Mais nous pouvons profiter de l'indétermination de φ_1 pour égaler à zéro le coefficient de sin 2φ, il suffira de poser

$$(4)\quad \ldots\ldots \operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2\beta(\alpha-a)}{\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]},$$

en mettant alors en facteur

$$\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]\cos 2\varphi_1$$

et tenant compte de la relation (4) l'expression (3) deviendra

$$\left[(\alpha-a)^2-\beta^2+b\right]\cos 2\varphi_1\left[\frac{1}{2\cos 2\varphi_1}\,\frac{(\alpha-a)^2+\beta^2+b}{(\alpha-a)^2-\beta^2+b}+\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2 2\varphi_1\right)\cos 2\varphi\right]$$

ou

$$\frac{(\alpha-a)^2-\beta^2+b}{\cos 2\varphi_1}\left[\frac{(\alpha-a)^2+\beta^2+b}{(\alpha-a)^2-\beta^2+b}\,\frac{\cos 2\varphi_1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right].$$

Remplaçant maintenant cos 2φ par $1-2\sin^2\varphi$, notre intégrale pourra s'écrire

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm\dfrac{(\alpha-a)^2-\beta^2+b}{\cos 2\varphi_1}\left[\dfrac{(\alpha-a)^2+\beta^2+b}{(\alpha-a)^2-\beta^2+b}\,\dfrac{\cos 2\varphi_1}{2}+\frac{1}{2}-\sin^2\varphi\right]}}.$$

Mais l'angle $2\varphi_1$ étant seulement déterminé par sa tangente au moyen de la formule (4), le signe de cos $2\varphi_1$ est encore arbitraire

(puisque l'on peut pour $2\varphi_1$ choisir entre deux valeurs différentes de π).

On choisira donc ce signe de manière que

$$\pm \frac{(\alpha - a)^2 - \beta^3 + b}{\cos 2\varphi_1}$$

soit dans tous les cas positif.

On prendra pour cela

$$\cos 2\varphi_1 = \frac{\pm\left[(\alpha - a)^2 - \beta^2 + b\right]}{\sqrt{[(\alpha - a)^2 - \beta^2 + b]^2 + 4\beta^2(\alpha - a)^2}},$$

valeur que nous pouvons écrire

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \cos 2\varphi_1 = \frac{\pm[(\alpha - a)^2 - \beta^2 + b]}{\sqrt{[(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b]^2 - 4\beta^2 b}}.$$

Les signes inférieur et supérieur se correspondant avec ceux placés sous le radical, notre intégrale deviendra donc enfin

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt[4]{[(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b]^2 - 4\beta^2 b}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}{2\sqrt{[(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b]^2 - 4\beta^2 b}} - \sin^2\varphi}}.$$

Nous sommes conduit maintenant à distinguer deux cas suivant le signe de b.

1° $b > 0$. Les quatre racines sont alors imaginaires.

On doit dans ce cas, ainsi que nous l'avons déjà dit, prendre toujours le signe supérieur, car l'intégrale ne serait pas réelle sans cela.

Lorsque b est positif

$$\frac{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}{\sqrt{[b^2 + (\alpha - a)^2 + b]^2 - 4\beta^2 b}}$$

est évidemment plus grand que 1.

Nous pourrons donc poser

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}{2\sqrt{[\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b]^2 - 4\beta^2 b}},$$

k étant réel et plus petit que 1.

Pour calculer k nous poserons d'ailleurs

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \sin\mu = \frac{2\beta\sqrt{b}}{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b},$$

μ étant positif et plus petit que 90°.

On a alors

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1 + \cos\mu}{2\cos\mu} = \frac{\cos^2\frac{\mu}{2}}{\cos\mu}$$

ou

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k^2 = \frac{\cos\mu}{\cos^2\frac{\mu}{2}}$$

et par suite

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k'^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2};$$

en tenant compte de l'équation (7) l'intégrale (6) s'écrira

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}} \frac{1}{\cos\frac{\mu}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

Ou en posant maintenant

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \sin\varphi = \operatorname{sn} u, \quad \cos\varphi = \operatorname{cn} u.$$

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}} \frac{u + C}{\cos\frac{\mu}{2}},$$

C étant la constante d'intégration.

En tenant compte de la relation (10) la formule (2) nous donnera alors pour l'expression de x en fonction de u

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad x = \alpha + \beta \frac{\operatorname{sn} u \cos \varphi_1 + \operatorname{cn} u \sin \varphi_1}{\operatorname{cn} u \cos \varphi_1 - \operatorname{sn} u \sin \varphi_1},$$

φ_1 ayant la valeur déduite des relations (4) et (5).

2° $b < 0$. La quantité sous le radical a deux racines réelles et deux imaginaires.

Dans ce cas on a

$$0 < \frac{1}{2} \pm \frac{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}{2\sqrt{[\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b]^2 - 4b\beta^2}} < 1,$$

quel que soit celui des deux signes que l'on prenne, car

$$\frac{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}{\sqrt{[\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b]^2 - 4b\beta^2}}$$

est plus petit que 1 en valeur absolue, puisque b est négatif.

Nous poserons donc

$$k^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}{2\sqrt{[\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b]^2 - 4b\beta^2}},$$

k^2 étant positif et plus petit que 1.

Pour calculer k^2 nous poserons

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{2\beta\sqrt{-b}}{\beta^2 + (\alpha - a)^2 + b}$$

et nous prendrions pour λ une valeur comprise entre 0 et π.

On aura alors

$$k^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\cos \lambda}{2}.$$

C'est-à-dire si l'on prend le signe supérieur

(14) . . . . $k^2 = \cos^2 \frac{\lambda}{2}$,

(15) . . . . $k'^2 = \sin^2 \frac{\lambda}{2}$;

si l'on prend le signe inférieur

(16) . . . . $k^2 = \sin^2 \frac{\lambda}{2}$,

(17) . . . . $k'^2 = \cos^2 \frac{\lambda}{2}$;

et l'intégrale (6) deviendra dans l'un et l'autre cas

$$\sqrt{\frac{\cos \lambda}{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2\varphi}},$$

ou en posant

(18) . . . . $\sin \varphi = k \operatorname{sn} u, \quad \cos \varphi = \operatorname{dn} u,$

(19) . . . . $\sqrt{\frac{\cos \lambda}{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}} (u + C)$,

C étant la constante d'intégration.

Remarquons ici que b étant négatif

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b$$

peut être aussi négatif, mais que dans ce cas $\cos \lambda$ l'est également puisque nous avons pris pour λ une valeur plus petite que π, et que, par suite,

$$\frac{\cos \lambda}{(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b}$$

est toujours positif.

La formule (2) nous donnera dans le cas présent pour l'expression de x en fonction de u

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad x = \alpha + \beta \frac{k \operatorname{sn} u \cos \varphi_1 + \operatorname{dn} u \sin \varphi_1}{\operatorname{dn} u \cos \varphi_1 - k \operatorname{sn} u \sin \varphi_1}.$$

Cette formule s'applique d'ailleurs quel que soit le signe du terme en x^4 sous le radical; seulement dans un cas la valeur de k sera donnée par la formule (14) et dans l'autre par la formule (16).

Remarque. Nous avons, en appliquant la méthode, supposé que l'un des facteurs du second degré étant sous la forme $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, l'autre était sous la forme $(x-a)^2 + b$, mais il est évident qu'elle s'appliquerait tout aussi bien si ce second facteur était sous la forme $Ax^2 + Bx + C$.

Applications. Soit l'intégrale

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}},$$

décomposons d'abord la quantité sous le radical en facteur du second degré réel.

Nous aurons

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}}.$$

Nous pourrions appliquer à ce cas les formules établies plus haut, mais, ainsi que nous l'avons dit, nous préférons les retrouver pour ce cas spécial en suivant seulement la méthode.

Posons donc

$$x - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} (\varphi + \varphi_1),$$

nous aurons

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left[\sqrt{2}\cos(\varphi+\varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\varphi+\varphi_1)\right]^2 + \frac{\cos^2(\varphi+\varphi_1)}{2}}},$$

ou

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{3}{2} + \cos 2(\varphi+\varphi_1) + \sin 2(\varphi+\varphi_1)}},$$

ou en développant,

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{3}{2} + [\cos 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1]\cos 2\varphi + [\cos 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1]\sin 2\varphi}},$$

et si nous prenons maintenant $\operatorname{tg} 2\varphi_1 = 1$ et par suite

$$\cos 2\varphi_1 = \sin 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

puisque $\cos 2\varphi_1$ doit ici être pris positivement, nous aurons

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}\cos 2\varphi}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}.$$

on posera donc

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} u, \quad \cos = \operatorname{cn} u$$

avec

$$k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}},$$

d'où

$$k'^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}},$$

et on aura

$$y = \sqrt{\frac{2}{3 + 2\sqrt{2}}}\,(u + C),$$

avec

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\cos\varphi_1 \operatorname{sn} u + \sin\varphi_1 \operatorname{cn} u}{\cos\varphi_1 \operatorname{cn} u - \sin\varphi_1 \operatorname{sn} u}\right];$$

ici $\varphi_1 = 22°,30'$ puisque $2\varphi_1 = 45°$.

Soit en second lieu l'intégrale

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^4 - 1)}},$$

ou

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^2 - 1)(x^2 + 1)}};$$

posons en appliquant la méthode

$$x = \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1),$$

on aura

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm[\sin^2(\varphi + \varphi_1) - \cos^2(\varphi + \varphi_1)]}},$$

ou

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\mp \cos 2(\varphi + \varphi_1)}}.$$

C'est-à-dire en développant

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\mp \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi \pm \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi}},$$

comme nous devons avoir

$$\sin 2\varphi_1 = 0, \quad \mp \cos 2\varphi_1 = 1.$$

Nous prendrons avec le signe supérieur

$$2\varphi_1 = \pi,$$

avec le signe inférieur

$$2\varphi_1 = 0,$$

et nous aurons dans les deux cas

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2} - \sin^2\varphi}},$$

par suite en posant

$$k^2 = \frac{1}{2},$$

$$\sin\varphi = k \operatorname{sn} u, \quad \cos\varphi = \operatorname{dn} u,$$

on aura

$$y = \frac{u + C}{\sqrt{2}}.$$

Pour l'expression de x en fonction de u nous aurons avec les signes supérieurs

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot\varphi,$$

ou

$$x = -\frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u},$$

puisqu'alors

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

et avec les signes inférieurs

$$x = \operatorname{tg}\varphi,$$

ou

$$x = \frac{k \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

II

La quantité sous le radical est du troisième degré et a deux racines imaginaires.

Soit donc l'intégrale

$$(21) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm (x-a)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}},$$

a, α et β étant réels.

Nous poserons encore

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x-\alpha=\beta \operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1),$$

φ_1 étant comme précédemment une arbitraire que nous déterminerons plus loin.

On aura alors pour l'intégrale (21)

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm \cos(\varphi+\varphi_1)\left[\beta \sin(\varphi+\varphi_1)-(a-\alpha)\cos(\varphi+\varphi_1)\right]}}.$$

Mais la quantité sous le radical pourra s'écrire

$$\pm\left[\tfrac{1}{2}\beta \sin 2(\varphi+\varphi_1)-\tfrac{1}{2}(a-\alpha)-\tfrac{1}{2}(a-\alpha)\cos 2(\varphi+\varphi_1)\right],$$

ou en développant

$$\pm\Big[\tfrac{1}{2}\left[\beta \cos 2\varphi_1-(\alpha-a)\sin 2\varphi_1\right] \sin 2\varphi+\tfrac{1}{2}\left[\beta \sin 2\varphi_1+(\alpha-a)\cos 2\varphi_1\right]\cos 2\varphi+\tfrac{1}{2}(\alpha-a)\Big].$$

Si l'on pose maintenant

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} 2\varphi_1=\frac{\beta}{\alpha-a},$$

on pourra satisfaire à cette équation au moyen de deux valeurs de $2\varphi_1$, l'une plus grande, l'autre plus petite que π.

Mais si nous mettons en facteur dans l'expression sous le radical $(\alpha - a)\cos 2\varphi_1$, nous pourrons l'écrire en tenant compte de l'équation (23)

$$\pm \frac{(\alpha - a)\cos 2\varphi_1}{2}\left[\frac{1}{\cos 2\varphi_1} + (1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_1)\cos 2\varphi\right],$$

ou

$$\pm \frac{\alpha - a}{\cos 2\varphi_1}(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi).$$

Mais l'équation (23) donnant deux valeurs de $2\varphi_1$ dont la différence est π, on pourra toujours prendre celle qui rend

$$\pm \frac{\alpha - a}{\cos 2\varphi_1} \quad \text{positif.}$$

On aura alors

$$\pm \frac{\alpha - a}{\cos 2\varphi_1} = \sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2}$$

et notre intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha - a)^2 + \beta^2}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi}}.$$

Nous poserons maintenant

(24) . . . . $k^2 = \cos^2\varphi_1,$

d'où

(25) . . . . $k'^2 = \sin^2\varphi_1,$

k et k' étant pris positivement, quel que soit le signe de $\cos\varphi_1$.

Puis

$$\sin\varphi = k \operatorname{sn} u, \qquad \cos\varphi = \operatorname{dn} u,$$

et l'intégrale deviendra, C désignant la constante d'intégration,

(26) . . . . . . $\dfrac{(u + C)}{\sqrt[4]{(\alpha - a)^2 + \beta^2}},$

et on déduira ensuite de la formule (22)

$$(27) \quad . \quad . \quad . \quad x = \alpha + \beta \frac{k \operatorname{sn} u \cos \varphi_1 + \operatorname{dn} u \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \operatorname{dn} u - k \operatorname{sn} u \sin \varphi_1}.$$

Application. Soit l'intégrale

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{\pm(x^3+1)}},$$

ou

$$y = \frac{dx}{\sqrt{\pm(x+1)(x^2-x+1)}},$$

et appliquons la méthode précédente.
Posons par suite

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1),$$

car

$$(x^2 - x + 1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

On aura

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm \cos(\varphi + \varphi_1)\left[\frac{3}{2}\cos(\varphi+\varphi_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\varphi+\varphi_1)\right]}},$$

ou

$$y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\pm\left[\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(\varphi+\varphi_1) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2(\varphi+\varphi_1)\right]}},$$

c'est-à-dire

$$y = \int \frac{2d\varphi}{\sqrt{\pm [3 + (3\cos 2\varphi_1 + \sqrt{3}\sin 2\varphi_1)\cos 2\varphi + (\sqrt{3}\cos 2\varphi_1 - 3\sin 2\varphi_1)\sin 2\varphi}}.$$

Nous poserons ici

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

et l'intégrale deviendra

$$y = \int \frac{2d\varphi}{\sqrt{\pm 3 \cos 2\varphi_1 \left[\frac{1}{\cos 2\varphi_1} + (1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_1) \cos 2\varphi\right]}},$$

ou

$$y = \int \frac{2d\varphi}{\sqrt{\frac{\pm 3}{\cos 2\varphi_1}(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi)}}.$$

Nous choisirons maintenant entre les deux valeurs de $2\varphi_1$ données par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

celle pour laquelle

$$\frac{\pm 3}{\cos 2\varphi_1}$$

est positif, cela revient à prendre

$$\cos 2\varphi_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et par suite} \qquad \sin 2\varphi_1 = \pm \frac{1}{2};$$

les signes se correspondant avec ceux de la quantité sous le radical, on aura alors pour les deux cas

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi}}.$$

Nous poserons ensuite

$$k^2 = \cos^2 \varphi_1 \qquad k'^2 = \sin^2 \varphi_1$$

k et k' étant pris positivement quel que soit le signe de $\cos \varphi_1$ et

$$\sin \varphi = k \operatorname{sn} u, \qquad \cos \varphi = \operatorname{dn} u.$$

On aura alors dans les deux cas, C étant la constante d'intégration,

$$y = \frac{u + C}{\sqrt[4]{3}},$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k \operatorname{sn} u \cos \varphi_1 + \operatorname{dn} u \sin \varphi_1}{\operatorname{dn} u \cos \varphi_1 - k \operatorname{sn} u \sin \varphi_1},$$

On peut remarquer que dans le cas du signe supérieur on a

$$2\varphi_1 = 30^\circ,$$

d'où

$$\varphi_1 = 15^\circ,$$

et par suite

$$k = \cos 15^\circ.$$

Dans le cas du signe inférieur on a

$$2\varphi_1 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ,$$

d'où

$$\varphi_1 = 105^\circ = 90^\circ + 15^\circ,$$

et par suite

$$k = -\cos(90^\circ + 15^\circ),$$

ou

$$k = \sin 15^\circ,$$

puisque nous prenons toujours k positif.

On peut remarquer lorsque la quantité sous le radical est du 3ᵉ degré que les modules correspondant aux deux cas où l'on prend soit le signe + soit le signe — devant cette quantité sous le radical sont toujours complémentaires.

En effet, les valeurs de $2\varphi_1$ données par l'équation (23) et qui répondent l'une au cas où l'on prend le signe +, l'autre à celui où l'on prend le signe —, diffèrent de π; par suite les valeurs correspondantes de φ_1 diffèrent de $\frac{\pi}{2}$ et le carré du sinus de l'une est égal au carré du cosinus de l'autre. Donc les valeurs de k^2 et k'^2 correspondantes, données par les équations (24) et (25), sont complémentaires.

Il en est de même lorsque la quantité sous le radical est du 4e degré, ainsi que cela résulte immédiatement des formules (14), (15), (16) et (17).

En résumé, pour faire la réduction lorsqu'il y a des racines imaginaires, si $(x-\alpha)^2+\beta^2$ est un facteur du second degré correspondant on posera $x=\alpha+\beta \operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1)$, φ_1 étant une constante on mettra la quantité sous le radical sous la forme d'une fonction du premier degré en $\cos 2\varphi$ et $\sin 2\varphi$. On profitera de l'indétermination de φ_1 pour égaler à zéro le coefficient de $\sin 2\varphi$, ce qui donnera une équation du premier degré en $\operatorname{tg} 2\varphi_1$, et pour faire en sorte que le coefficient de $\cos 2\varphi$ soit positif. Le reste de la réduction se fera sans difficulté, ainsi qu'on l'a vu plus haut.

III

Revenons maintenant sur le cas où la quantité sous le radical est du 3e degré et les trois racines réelles. Il y a alors quatre hypothèses à examiner.

1° $$y=\int\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}},$$

avec

$$b>x>c \qquad \text{et} \qquad a>b>c.$$

On posera dans ce cas

$$x=b\,\mathrm{sn}^2 u+c\,\mathrm{cn}^2 u=c+(b-c)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

d'où

$$(28) \quad \ldots \quad x-c=(b-c)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

$$(29) \quad \ldots \quad b-x=(b-c)\,\mathrm{cn}^2 u,$$

$$a-x=(a-c)\left[1-\frac{b-c}{a-c}\,\mathrm{sn}^2 u\right].$$

Mais si nous prenons

$$(30) \quad \ldots\ldots \quad k^2 = \frac{b-c}{a-c},$$

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad k'^2 = \frac{a-b}{a-c},$$

on aura

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad a - x = (a-c)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

et comme

$$dx = 2(b-c)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,du,$$

on aura enfin

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{2}{\sqrt{(a-c)}}(u + C),$$

C étant toujours la constante d'intégration dans cette formule comme dans celles qui suivent.

2° Soit

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}},$$

avec

$$a > x > b \quad \text{et toujours} \quad a > b > c.$$

On pose alors

$$x = a\,\mathrm{cn}^2 u + b\,\mathrm{sn}^2 u = a - (a-b)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

d'où

$$(34) \quad \ldots \quad a - x = (a-b)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

$$(35) \quad \ldots \quad x - b = (a-b)\,\mathrm{cn}^2 u,$$

$$x - c = (a-c)\left[1 - \frac{a-b}{a-c}\,\mathrm{sn}^2 u\right].$$

C'est-à-dire en posant

$$(36) \quad \ldots\ldots \quad k^2 = \frac{a-b}{a-c},$$

$$(37) \quad \ldots\ldots \quad k'^2 = \frac{b-c}{a-c},$$

$$(38) \quad \ldots\ldots \quad x - c = (a-c)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

et comme

$$dx = -2(a-b)\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u\,\text{du},$$

on aura enfin

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{2}{\sqrt{a-c}}(C-u).$$

3° Soit

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}},$$

avec

$$x > a \qquad a > b > c,$$

on posera

$$x = ak^2\text{sn}^2(u+iK') + c\,\text{dn}^2(u+iK') = c + (a-c)\,k^2\,\text{sn}^2(u+iK').$$

Remarquons de suite que u décroissant de K à 0, $k^2\,\text{sn}^2(u+iK')$ est réel et croit de 1 à $+\infty$ $\text{dn}^2(u+iK')$ est réel et décroit de 0 à $-\infty$.

On aura en vertu de la relation posée plus haut

$$x - a = -(a-c)\,\text{dn}^2(u+iK'),$$

$$x - b = -(b-c)\left[1 - \frac{a-c}{b-c}\,k^2\,\text{sn}^2(u+iK')\right].$$

Par suite en prenant

$$(30) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad k^2 = \frac{b-c}{a-c},$$

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad k'^2 = \frac{a-b}{a-c},$$

$$x - b = -(b-c)\,\text{cn}^2(u+iK'),$$

$$x - c = (a-c)\,k^2\,\text{sn}^2(u+iK'),$$

et comme

$$dx = 2(a-c)\,k^2\,\text{sn}(u+iK')\,\text{cn}(u+iK')\,\text{dn}(u+iK')\,\text{du},$$

on aura

$$y = \frac{2k(u+C)}{\sqrt{b-c}},$$

ou en tenant compte de la valeur de k

$$(40) \quad \ldots\ldots\quad y=\frac{2\,(u+C)}{\sqrt{a-c}}.$$

Mais l'on a les relations

$$(41) \quad \ldots\ldots\quad \mathrm{sn}\,(u+iK')=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u},$$

$$(42) \quad \ldots\ldots\quad \mathrm{cn}\,(u+iK')=-\frac{i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u},$$

$$(43) \quad \ldots\ldots\quad \mathrm{dn}\,(u+iK')=-\,i\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},$$

qui donne pour l'expression de x en fonction de u

$$(44) \quad \ldots\ldots\quad x-a=(a-c)\frac{\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{sn}^2\,u},$$

$$(45) \quad \ldots\ldots\quad x-b=(b-c)\frac{\mathrm{dn}^2\,u}{k^2\,\mathrm{sn}^2\,u},$$

$$(46) \quad \ldots\ldots\quad x-c=(a-c)\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,u}.$$

4° Soit enfin

$$x=\int^{\prime}\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}},$$

avec

$$x<c \qquad a>b>c,$$

on posera dans ce cas

$$x=ck^2\,\mathrm{sn}^2\,(u+iK')+a\,\mathrm{dn}^2(u+iK')=a-(a-c)\,k^2\mathrm{sn}^2\,(u+iK'),$$

et on en déduit

$$a-x=(a-c)\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u+iK'),$$

$$b-x=-\,(a-b)\left[1-\frac{a-c}{a-b}\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,(u+iK')\right],$$

ou en prenant

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k^2 = \frac{a - b}{a - c},$$

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k'^2 = \frac{b - c}{a - c},$$

$$b - x = -(a - b)\,\mathrm{cn}^2(u + i\mathrm{K}'),$$
$$c - x = -(a - c)\,\mathrm{dn}^2(u + i\mathrm{K}');$$

comme d'ailleurs

$$dx = -2(a - c)k^2\,\mathrm{sn}(u + i\mathrm{K}')\,\mathrm{cn}(u + i\mathrm{K}')\,\mathrm{dn}(u + i\mathrm{K}')du,$$

on aura

$$y = \frac{2k(\mathrm{C} - u)}{\sqrt{a - b}},$$

ou en tenant compte de la valeur de k

$$(47) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{2(\mathrm{C} - u)}{\sqrt{a - c}}.$$

On aura d'ailleurs, en vertu des relations rappelées plus haut, (41), (42) et (43),

$$(48) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a - x = \frac{a - c}{\mathrm{sn}^2 u},$$

$$(49) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b - x = (a - b)\frac{\mathrm{dn}^2 u}{k^2\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$(50) \quad \ldots\ldots\ldots \quad c - x = (a - c)\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u}.$$

Dans toutes les transformations précédentes k^2 et k'^2 sont toujours positifs et par suite aussi plus petits que 1 ; on peut remarquer que, encore ici, les valeurs de k^2 et k'^2, correspondant aux cas où le coefficient de x^3 sous le radical est positif, sont complémentaires de celles pour les cas où le coefficient de x^3 est négatif.

Il est enfin évident que dans les expressions de y en fonction de u on pourrait mettre le signe $\pm$ devant le second membre à

cause du double signe qui existe, en réalité, toujours devant le radical; cela revient à faire croître et décroître u dans le même sens que y ou en sens contraire.

Pour le cas où la quantité sous le radical est du 3e degré et les racines réelles, on peut se rappeler très simplement ce qu'il y a à poser dans chaque cas pour faire la réduction, en se servant du moyen mnémonique suivant :

1° Lorsque x est compris entre deux racines consécutives du radical, on pose x égale à une fonction linéaire homogène de $\operatorname{sn}^2 u$ et $\operatorname{cn}^2 u$ et le coefficient de $\operatorname{sn}^2 u$ est toujours la racine moyenne b de la quantité sous le radical; le coefficient de $\operatorname{cn}^2 u$ est l'autre racine qui limite l'intervalle dans lequel x peut varier à partir de b, l'intégrale restant réelle;

2° Lorsque x est plus grand que la plus grande racine de la quantité sous le radical ou plus petit que la plus petite, en un mot lorsque x peut varier jusqu'à l'infini, on pose x égale à une fonction linéaire homogène de $k^2 \operatorname{sn}^2 (u + i\mathrm{K}')$ et de $\operatorname{dn}^2 (u + i\mathrm{K}')$ et le coefficient de $k^2 \operatorname{sn}^2 (u + i\mathrm{K}')$ est la racine à partir de laquelle x peut varier jusqu'à l'infini, l'intégrale restant réelle; le coefficient de $\operatorname{dn}^2 (u + i\mathrm{K}')$ est l'autre racine extrême.

Le cas où la quantité sous le radical est du 4e degré et où toutes les racines sont réelles se ramène à l'un des cas précédents en posant

$$x - a = \frac{1}{z},$$

a étant l'une quelconque des racines de la quantité sous le radical; mais je n'insiste pas sur ce point, qui fait l'objet de la note parue dans le tome VIII de ce recueil et dont j'ai parlé en commençant.

Application. — Comme application du cas où la quantité sous le radical est du troisième degré et les racines réelles, considérons le problème du pendule circulaire.

Soit

θ l'angle d'écart du pendule;

l la longueur du pendule;

g la quantité;

α l'angle d'écart à un instant déterminé et

ω la vitesse angulaire du pendule au même instant.

L'équation du mouvement sera

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\frac{\omega^2 l}{2g} + \cos\theta - \cos\alpha}.$$

Posons

$$\cos\theta = z,$$
$$\cos\alpha = a,$$

nous aurons

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(\frac{\omega^2 l}{2g} + z - a\right)}}.$$

Nous devrons maintenant distinguer deux cas :

1° Le mouvement est oscillatoire.

On peut alors, sans nuire à la généralité, supposer $\omega = 0$, en prenant pour α la valeur positive de θ pour laquelle $\frac{d\theta}{dt}$ est nul.

On aura donc

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z-a)(z+1)}}.$$

Les racines du radical sont rangées dans l'ordre suivant :

$$1 > a > -1,$$

et l'on a

$$1 > z > a.$$

Appliquons maintenant la règle mnémonique donnée plus haut; nous poserons

$$z = a\,\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1 - (1-a)\,\mathrm{sn}^2 u,$$

d'où

$$1 - z = (1-a)\,\mathrm{sn}^2 u,$$
$$z - a = (1-a)\,\mathrm{cn}^2 u,$$
$$1 + z = 2\left[1 - \frac{1-a}{2}\mathrm{sn}^2 u\right] = 2\,\mathrm{dn}^2 u,$$

en posant

$$k^2 = \frac{1-a}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

puis comme

$$dz = -2(1-a)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,du,$$

on aura

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,du,$$

en faisant croître u dans le même sens que t.

On en conclut en prenant $t = 0$ pour $u = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,u.$$

Remplaçant maintenant z et u par leur valeur en fonction de θ et t et faisant croître θ et u dans le même sens à partir de zéro, on aura avec quelques réductions évidentes

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{g}{t}}\,t\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{dn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Puis pour la vitesse angulaire au moyen de la formule

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right);$$

2° Le mouvement du pendule a lieu toujours dans le même sens. On peut alors, θ devant être périodiquement égal à π, prendre $\alpha = \pi$ ou $a = -1$.

On aura donc

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z+1)\left(z+1+\frac{\omega^2 l}{2g}\right)}}.$$

Les racines sont alors rangées dans l'ordre suivant :

$$1 > -1 > -1 - \frac{\omega^2 l}{2g},$$

et on a

$$1 > z > -1.$$

En vertu de la règle mnémonique on posera donc

$$z = -\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 - 2\operatorname{sn}^2 u,$$

d'où

$$1 - z = 2\operatorname{sn}^2 u,$$

$$1 + z = 2\operatorname{cn}^2 u,$$

$$z + 1 + \frac{\omega^2 l}{2g} = \left(2 + \frac{\omega^2 l}{2g}\right)\left(1 - \frac{4g}{4g+\omega^2 l}\operatorname{sn}^2 u\right),$$

ou en posant

$$k^2 = \frac{4g}{4g+\omega^2 l},$$

$$z + 1 + \frac{\omega^2 l}{2g} = \frac{4g+\omega^2 l}{2g}\operatorname{dn}^2 u,$$

et comme

$$dz = -4\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\, du,$$

on aura

$$dt = 2\sqrt{\frac{l}{4g+\omega^2 l}}\, du,$$

en faisant croître t et u dans le même sens, et on en conclut en prenant $t = 0$ pour $u = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{4g+\omega^2 l}}\, u,$$

ou

$$u = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega^2}{4}}\, t.$$

On aura donc en remplaçant z par sa valeur en fonction de θ avec quelques réductions faciles

$$\sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega^2}{4}}\, t\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega^2}{4}}\, t\right),$$

$$\cos\theta + 1 + \frac{\omega^2 l}{2g} = \frac{4g + \omega^2 l}{2g}\operatorname{dn}^2\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega^2}{4}}\, t\right),$$

et la formule

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\frac{\omega^2 l}{2g} + \cos\theta + 1}$$

nous donnera pour la vitesse angulaire

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{4g}{l} + \omega^2}\operatorname{dn} u.$$

On obtient donc ainsi, d'une façon très simple, la solution complète du problème du pendule circulaire.

SUR
UNE SUITE DE POLYGONES

TELS QUE CHACUN D'EUX SOIT FORMÉ EN JOIGNANT LES MILIEUX DES COTÉS DU PRÉCÉDENT

PAR

M. Maurice d'OCAGNE

Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort
(Charente-Inférieure).

---

1. Soit donné dans l'espace un polygone P_0, plan ou gauche, de n côtés; appelons $A_1, A_2, \ldots A_n$ les sommets de ce polygone, dont les coordonnées sont $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$. Nous désignerons, d'une manière générale, par A_k^1 le milieu du côté $A_k A_{k+1}$ et nous formerons le polygone P_1 ayant pour sommets $A_1^1, A_2^1, \ldots A_n^1$, dont les coordonnées sont (x_1^1, y_1^1, z_1^1), $(x_2^1, y_2^1, z_2^1) \ldots (x_n^1, y_n^1, z_n^1)$. De la même manière, nous déduirons le polygone P_2 de P_1, puis P_3 de P_2, et ainsi de suite.

Le problème général qui se pose sur cette suite de polygones est le suivant : *trouver les expressions des coordonnées des sommets du polygone* P_p *en fonction des coordonnées des sommets du polygone* P_0.

M. Darboux a traité ce problème dans une note insérée au *Bulletin des sciences mathématiques* (*). La solution de l'éminent géomètre, fort élégante, repose sur l'introduction de certains paramètres t définis en fonction des coordonnées des sommets du polygone initial et des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Les formules

---

(*) 2e série, t. II, p. 298.

ainsi établies se prêtent à la démonstration de théorèmes intéressants, mais elles ne donnent pas l'expression *explicite* des coordonnées des sommets d'un polygone quelconque de la suite en fonction des coordonnées des sommets du polygone initial; d'ailleurs, l'ingénieux artifice imaginé par M. Darboux ne se présente pas tout naturellement. Aussi, avons-nous repris le problème par la voie directe; on verra que la solution est, dans ce cas, d'une très grande simplicité et que le résultat ne laisse pas que d'être assez curieux.

Nous avons déjà traité, par une autre méthode, le cas où le polygone donné se réduit à un triangle (*).

I

3. Il suffit que nous nous occupions de l'une des coordonnées x, par exemple, les calculs étant les mêmes pour y et z.

De plus, nous n'avons besoin, pour avoir les coordonnées relatives au polygone P_p, que de calculer x_1^p. Par permutation circulaire des éléments $x_1, x_2, \ldots x_n$ nous obtiendrons $x_2^p, x_3^p, \ldots x_n$.

On a, par un calcul direct

$$x_1^1 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$x_1^2 = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{2^2},$$

$$x_1^3 = \frac{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4}{2^3},$$

. . . .

On voit que la loi de formation des coefficients des numérateurs est précisément la même que celle des nombres figurés du triangle arithmétique de Pascal : un coefficient est égal à la somme de celui qui est directement au-dessus de lui, dans la

(*) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII, p. 78.

ligne précédente, et de celui qui est à gauche de celui-ci. Cela va de soi, car le coefficient de x_k dans x_1^k est coefficient de x_{k+1} dans x_2^k.

Comme d'ailleurs les valeurs initiales (1, 1) sont les mêmes que dans le triangle de Pascal, on est immédiatement conduit au théorème suivant :

Considérons la suite,

$$1, C_p^1, C_p^2, \dots C_p^n, C_p^{n+1}, C_p^{n+2}, \dots$$

des coefficients du développement du binôme $(x + 1)^p$; *multiplions ces coefficients pris de* n *en* n *à partir du premier par* x_1, *de* n *en* n *à partir du deuxième par* x_2, *de* n *en* n *à partir du troisième par* x_3, *etc..., et faisons la somme. Nous aurons, en divisant par* 2^p, *la valeur de* x_1^p. *Ainsi*

$$x_1^p = \frac{x_1 + C_p^1 x_2 + C_p^2 x_3 + \cdots + C_p^{n-1} x_n + C_p^n x_1 + C_p^{n+1} x_2 + \cdots}{2^p}$$

et, par permutation circulaire, d'une manière générale,

$$(1)\quad x_k^p = \frac{\overline{x_k + C_p^1 x_{k+1} + C_p^2 x_{k+2} + \cdots + C_p^{n-k} x_n + C_p^{n-k+1} x_1 + \cdots + C_p^{n-1} x_{k-1}} + \overline{C_p^n x_k + \cdots}}{2^p}$$

2. On aperçoit une conséquence immédiate de cette formule. Si on effectue la somme

$$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p,$$

on voit que, au numérateur, le coefficient de chacune des quantités $x_1, x_2, \dots x_n$ est égal à la somme des coefficients du binôme $(x + 1)^p$, c'est-à-dire à 2^p, et comme le dénominateur est précisément 2^p, on a

$$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

c'est-à-dire que *les points* $A_1^p, A_2^p, \dots A_n^p$ *ont même centre de gravité que les points* $A_1, A_2, \dots A_p$, car la même relation a lieu pour les y et pour les z.

4. Nous allons maintenant, dans l'expression (1) de x_k^p, grouper les termes en x_1, en x_2, etc., ... de manière à mettre cette formule sous la forme suivante

$$(2) \quad . \quad . \quad x_k^p = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots + M_i x_i + \cdots + M_n x_n}{2^p},$$

Le coefficient M_i est la somme des coefficients du développement du binôme $(x + 1)^p$ pris de n en n à partir de C_p^{i-k} si $i > k$, et à partir de C_p^{i-k+n} si $i < k$. En convenant, comme cela se fait d'habitude, de prendre $C_p^m = 0$ lorsque m est négatif, nous pourrons dire que, dans tous les cas, le premier des termes qui entrent dans M_i est C_p^{i-k}, et nous aurons

$$M_i = C_p^{i-k} + C_p^{i-k+n} + C_p^{i-k+2n} + \cdots + C_p^{i-k+\mu n}.$$

Il s'agit de déterminer le paramètre μ qui figure dans l'indice supérieur du dernier terme de l'expression de M_i.

Ce paramètre est déterminé par la condition

$$i - k + \mu n \leq p,$$

ou

$$\mu \leq \frac{p + k - i}{n}.$$

En représentant, suivant l'usage, par $E\left(\frac{a}{b}\right)$ la partie entière du quotient de a par b, nous aurons donc

$$\mu = E\left(\frac{p + k - i}{n}\right),$$

et l'expression de M_i sera

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad M_i = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=E\left(\frac{p+k-i}{n}\right)} C_p^{i-k+\lambda n}$$

II

5. Le problème se trouve résolu, soit par la formule (1), soit par les formules (2) et (3); nous allons maintenant faire voir comment se transforme le résultat, si l'on fait intervenir dans la question les racines imaginaires de l'unité.

La formule

$$(x+1)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + C_p^3 x^{p-3} + \cdots$$

peut s'écrire

$$(4)\ .\ .\ \left\{\begin{aligned}(x+1)^p = {} & x^p\left(1 + \frac{C_p^n}{x^n} + \frac{C_p^{2n}}{x^{2n}} + \cdots\right),\\ & + x^{p-1}\left(C_p^1 + \frac{C_p^{n+1}}{x^n} + \frac{C_p^{2n+1}}{x^{2n}} + \cdots\right),\\ & + x^{p-2}\left(C_p^2 + \frac{C_p^{n+2}}{x^n} + \frac{C_p^{2n+2}}{x^{2n}} + \cdots\right),\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + x^{p-n+1}\left(C_p^{n-1} + \frac{C_p^{2n-1}}{x^n} + \frac{C_p^{3n-1}}{x^{2n}} + \cdots\right).\end{aligned}\right.$$

Cela posé, désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et, d'une manière générale, par S_h la somme des coefficients du développement de $(x+1)^p$ pris de n en n, à partir C_p^{h-1}. Faisant successivement, dans la formule (4), $x=\omega_1$, $x=\omega_2, \ldots x=\omega_n$, nous avons

$$\left\{\begin{aligned}(\omega_1+1)^p &= \omega_1^p S_1 + \omega_1^{p-1} S_2 + \cdots + \omega_1^{p-n+1} S_n,\\ (\omega_2+1)^p &= \omega_n^p S_1 + \omega_2^{p-1} S_2 + \cdots + \omega_2^{p-n+1} S_n,\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\omega_n+1)^p &= \omega_n^p S_1 + \omega_n^{p-1} S_2 + \cdots + \omega_n^{p-n+1} S_n,\end{aligned}\right.$$

ou, en tenant compte de ce que $\omega_1^n = \omega_2^n = \cdots = \omega_n^n = 1$,

$$(5)\ .\ .\ \left\{\begin{array}{l} \left(1+\frac{1}{\omega_1}\right)^p = \omega_1^n S_1 + \omega_1^{n-1} S_2 + \cdots + \omega_1 S_n, \\ \left(1+\frac{1}{\omega_2}\right)^p = \omega_2^n S_1 + \omega_2^{n-1} S_2 + \cdots + \omega_2 S_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(1+\frac{1}{\omega_n}\right)^p = \omega_n^n S_1 + \omega_n^{n-1} S_2 + \cdots + \omega_n S_n. \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système d'équations, remarquons que $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ étant les racines de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0,$$

la somme $\omega_1^\rho + \omega_2^\rho + \cdots + \omega_p^\rho$, où ρ est un nombre entier, est égale à n lorsque ρ est un multiple de n, et nulle dans tous les autres cas. Cette remarque étant faite, additionnons membre par membre les équations (5); il vient

$$\left(1+\frac{1}{\omega_1}\right)^p + \left(1+\frac{1}{\omega_2}\right)^p + \cdots + \left(1+\frac{1}{\omega_n}\right)^p = nS_1.$$

Multiplions maintenant la première des équations (5) par ω_1, la deuxième par ω_2, la troisième par ω_3, ... et faisons la somme; nous avons, en vertu de la remarque précédente

$$\omega_1\left(1+\frac{1}{\omega_1}\right)^p + \omega_2\left(1+\frac{1}{\omega_2}\right)^p + \cdots + \omega_n\left(1+\frac{1}{\omega_n}\right)^p = nS_2,$$

et ainsi de suite.

On obtient par ce procédé les valeurs de $S_1, S_2, \ldots S_n$. On voit que, d'une manière générale,

$$S_i = \frac{1}{n}\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho^{i-1}\left(1+\frac{1}{\omega_\rho}\right)^p.$$

On a ensuite

$$x_1^p = \frac{1}{2^p}(S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_n x_n),$$

$$x_2^p = \frac{1}{2^p}(S_1 x_2 + S_2 x_3 + \cdots + S_n x_1),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_n^p = \frac{1}{2^p}(S_1 x_n + S_2 x_1 + \cdots + S_n x_{n-1}).$$

Ces formules sont différentes de celles de M. Darboux, qui ne contiennent qu'explicitement x_1, x_2, ... x_n, dans les paramètres t dont il a été parlé au commencement de cette Note. Il n'est pas sans intérêt de se rendre compte de la façon dont les coordonnées des sommets du polygone initial interviennent dans la formation des coordonnées des sommets d'un polygone quelconque; c'est ce que l'on fait grâce aux formules précédentes.

6. Nous allons démontrer, au moyen de ces formules, que si p croît indéfiniment les n sommets du polygone P_p tendent à devenir infiniment voisins du centre de gravité commun de tous les polygones de la suite.

Parmi les racines ω_1, ω_2, ... ω_n, données par la formule $\omega_\rho = e^{\frac{2(\rho-1)\pi}{n} i}$, l'une ω_1 est égale à l'unité; on peut donc, en posant

$$S'_i = \frac{1}{n}\sum_{\rho=2}^{\rho=n} \omega_\rho^{i-1}\left(1 + \frac{1}{\omega_\rho}\right)^p,$$

écrire

$$S_i = \frac{2^p}{n} + S'_i;$$

alors

$$x_k^p = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} + \frac{S'_1}{2^p}x_k + \frac{S'_2}{2^p}x_{k+1}\cdots + \frac{S'_n}{2^p}x_{k-1},$$

et il suffit, pour démontrer la propriété énoncée, de faire voir que $\frac{S'_i}{2^p}$ devient infiniment petit lorsque p croît indéfiniment, ou,

puisque S'_i comprend un nombre fini de termes de la forme $\omega_\rho^{i-1}\left(1+\frac{1}{\omega_\rho}\right)$ (où ω_ρ est une racine $n^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité) que

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{\omega_\rho}\right)^p}{2^p}$$

devient infiniment petit lorsque p croit indéfiniment; en d'autres termes, que

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\omega_\rho+1}{2\omega_\rho}\right)<1.$$

Or, on a

$$\omega_\rho = e^{\frac{2(\rho-1)\pi}{n}i} = \cos\frac{2(\rho-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(\rho-1)\pi}{n};$$

donc

$$\begin{aligned}1+\omega_\rho &= 1+\cos\frac{2(\rho-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(\rho-1)\pi}{n}\\ &= 2\cos^2\frac{(\rho-1)\pi}{n} + i2\sin\frac{(\rho-1)\pi}{n}\cos\frac{(\rho-1)\pi}{n}\\ &= 2\cos\frac{(\rho-1)\pi}{n}e^{\frac{(\rho-1)\pi}{n}i};\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1+\omega_\rho}{2\omega_\rho} = \cos\frac{(\rho-1)\pi}{n}e^{\frac{(-\rho+1)\pi}{n}i},$$

dont le module est $\cos\frac{(\rho-1)\pi}{n}$, qui est inférieur à l'unité, ce qu'il fallait démontrer.

L'ATROPHIE

DES

MUSCLES DU THORAX ET DE L'ÉPAULE

CHEZ LES PLEURÉTIQUES

PAR

le Dr DESPLATS

PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DE LILLE.

Les atrophies musculaires sont fréquentes et se produisent sous l'action de causes très diverses. Il faut les rechercher pour les découvrir; aussi sont-elles souvent méconnues, au grand détriment des malades que cette méconnaissance peut condamner à une irrémédiable infirmité. C'est ce qui arrive surtout dans les cas d'atrophie musculaire consécutifs à une arthrite du genou. Le malade a longtemps et beaucoup souffert. On l'a condamné au repos, aux révulsifs, à la compression, etc. Après de longues semaines, la douleur et le gonflement ont cédé. Il recommence à marcher, difficilement d'abord. Personne ne s'en étonne : son mal a été si long! Au bout de quelque temps on trouve que les progrès sont lents, que la « jambe » est toujours faible et l'articulation « raide ». On essaie des frictions, du massage, des bains stimulants, même de l'électricité, mais sans méthode, en attendant les *Eaux*, d'où le malade revient boitant encore et espérant, comme on le lui a promis, que le bien se fera sentir plus tard. Plus tard, c'est la même chose et le malade finit par prendre son parti d'un mal qui résiste à tout parce qu'on n'en a pas déterminé la véritable cause. Heureusement, cette triste terminaison est devenue rare depuis que l'attention des praticiens a été appelée sur les atrophies musculaires qui compliquent si souvent les arthrites. L'intervention médicale est aujourd'hui précise, persévérante autant qu'il est nécessaire et presque toujours efficace. J'en ai eu

la preuve, il y a quelques mois, dans ma clientèle. Une jeune fille, grande et forte, mais rhumatisante, était retenue, depuis deux mois, dans son lit ou sur un fauteuil, lorsque je la vis. Elle avait une double arthrite du genou. Déjà les muscles extenseurs de la cuisse, particulièrement le triceps droit, étaient tellement atrophiés qu'on ne pouvait obtenir une contraction apparente, même par une faradisation énergique. Il fallut plusieurs semaines pour réveiller d'abord la contractilité électrique, puis la contractilité volontaire, et, trois mois après, malgré la faradisation et le massage, le triceps droit n'avait repris ni son volume ni sa force. Il fallut six mois pour obtenir une guérison complète. Certainement, ce résultat n'eût pas été atteint si, de bonne heure, on n'avait constaté l'atrophie du triceps et si on n'avait su qu'elle suffisait pour expliquer l'impotence du membre et la claudication.

Depuis plusieurs années, l'expérience m'a appris que chez les pleurétiques l'atrophie des muscles du thorax et de l'épaule est fréquente. Je crois qu'elle joue un rôle dans les déformations du squelette et qu'elle n'est pas sans action sur l'avenir morbide du sujet qui la porte ; aussi ai-je pris l'habitude de la rechercher et de la signaler à mes élèves [1]. Je voudrais l'étudier plus complètement aujourd'hui et montrer : 1° qu'elle est fréquente et précoce; 2° que de bonne heure elle entraîne des modifications de la respiration; 3° que, plus tard, elle joue un rôle prépondérant dans les déformations du squelette consécutives à la pleurésie; 4° qu'elle est la cause indirecte de l'imprégnation et de la pullulation tuberculeuse, dont les poumons, précédemment atteints de pleurésie, sont si souvent le siège.

En terminant je montrerai que nous ne sommes pas sans action sur cette atrophie et que nous devons la prévenir quand elle se prépare, l'arrêter quand elle s'établit, la combattre activement quand elle est produite :

1° *L'atrophie musculaire est fréquente et précoce chez les pleurétiques.* — Depuis longtemps Laënnec et Delpech ont étudié les graves déformations qui se produisent chez les vieux pleu-

---

[1] Voir la thèse inaugurale (Paris 1883) de mon ancien interne, le docteur Ch. Bernard.

L'ATROPHIE

DES

MUSCLES DU THORAX ET DE L'ÉPAULE

CHEZ LES PLEURÉTIQUES

PAR

le Dr DESPLATS
PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DE LILLE.

Les atrophies musculaires sont fréquentes et se produisent sous l'action de causes très diverses. Il faut les rechercher pour les découvrir; aussi sont-elles souvent méconnues, au grand détriment des malades que cette méconnaissance peut condamner à une irrémédiable infirmité. C'est ce qui arrive surtout dans les cas d'atrophie musculaire consécutifs à une arthrite du genou. Le malade a longtemps et beaucoup souffert. On l'a condamné au repos, aux révulsifs, à la compression, etc. Après de longues semaines, la douleur et le gonflement ont cédé. Il recommence à marcher, difficilement d'abord. Personne ne s'en étonne : son mal a été si long! Au bout de quelque temps on trouve que les progrès sont lents, que la « jambe » est toujours faible et l'articulation « raide ». On essaie des frictions, du massage, des bains stimulants, même de l'électricité, mais sans méthode, en attendant les *Eaux*, d'où le malade revient boitant encore et espérant, comme on le lui a promis, que le bien se fera sentir plus tard. Plus tard, c'est la même chose et le malade finit par prendre son parti d'un mal qui résiste à tout parce qu'on n'en a pas déterminé la véritable cause. Heureusement, cette triste terminaison est devenue rare depuis que l'attention des praticiens a été appelée sur les atrophies musculaires qui compliquent si souvent les arthrites. L'intervention médicale est aujourd'hui précise, persévérante autant qu'il est nécessaire et presque toujours efficace. J'en ai eu

la preuve, il y a quelques mois, dans ma clientèle. Une jeune fille, grande et forte, mais rhumatisante, était retenue, depuis deux mois, dans son lit ou sur un fauteuil, lorsque je la vis. Elle avait une double arthrite du genou. Déjà les muscles extenseurs de la cuisse, particulièrement le triceps droit, étaient tellement atrophiés qu'on ne pouvait obtenir une contraction apparente, même par une faradisation énergique. Il fallut plusieurs semaines pour réveiller d'abord la contractilité électrique, puis la contractilité volontaire, et, trois mois après, malgré la faradisation et le massage, le triceps droit n'avait repris ni son volume ni sa force. Il fallut six mois pour obtenir une guérison complète. Certainement, ce résultat n'eût pas été atteint si, de bonne heure, on n'avait constaté l'atrophie du triceps et si on n'avait su qu'elle suffisait pour expliquer l'impotence du membre et la claudication.

Depuis plusieurs années, l'expérience m'a appris que chez les pleurétiques l'atrophie des muscles du thorax et de l'épaule est fréquente. Je crois qu'elle joue un rôle dans les déformations du squelette et qu'elle n'est pas sans action sur l'avenir morbide du sujet qui la porte ; aussi ai-je pris l'habitude de la rechercher et de la signaler à mes élèves [1]. Je voudrais l'étudier plus complètement aujourd'hui et montrer : 1° qu'elle est fréquente et précoce; 2° que de bonne heure elle entraîne des modifications de la respiration; 3° que, plus tard, elle joue un rôle prépondérant dans les déformations du squelette consécutives à la pleurésie; 4° qu'elle est la cause indirecte de l'imprégnation et de la pullulation tuberculeuse, dont les poumons, précédemment atteints de pleurésie, sont si souvent le siège.

En terminant je montrerai que nous ne sommes pas sans action sur cette atrophie et que nous devons la prévenir quand elle se prépare, l'arrêter quand elle s'établit, la combattre activement quand elle est produite :

1° *L'atrophie musculaire est fréquente et précoce chez les pleurétiques.* — Depuis longtemps Laënnec et Delpech ont étudié les graves déformations qui se produisent chez les vieux pleu-

---

[1] Voir la thèse inaugurale (Paris 1883) de mon ancien interne, le docteur Ch. Bernard.

rétiques. Ce n'est pas d'elles que je veux parler. J'appelle en ce moment l'attention sur les pleurésies aiguës et les conséquences qu'elles entraînent pour le squelette et pour les muscles. Examinez un pleurétique atteint depuis quelques semaines et dont l'épanchement a été résorbé ou aspiré. D'abord prenez dans vos mains les deux côtés du thorax, vous serez frappé du moindre volume du côté malade : il remplit moins la main et la courbure des côtes est plus prononcée; de plus, les espaces intercostaux sont plus étroits et plus fermes. Si vous comparez l'épaisseur des parties molles qui recouvrent le squelette, vous trouverez que, du côté lésé, la peau est plus mobile et que les tissus sous-jacents paraissent moins épais. Ces signes sont surtout frappants à la région dorsale, au-dessous et en dehors de l'angle de l'omoplate. Ils sont quelquefois perceptibles à travers le gilet et la chemise. Je les ai constatés chez tous mes malades et, dans un cas même, il a suffi de dix jours pour qu'ils fussent très apparents.

Ces constatations suffisent pour montrer qu'il y a aplatissement du thorax, ce que tout le monde admet; mais jusqu'ici rien ne montre que les muscles soient atrophiés.

Pour vous en convaincre, dépouillez votre sujet et faites-le coucher sur le dos, les bras portés en haut et en dehors, les mains saisissant les montants du lit. Dans cette position apparaîtront les muscles superficiels antérieurs et latéraux du thorax. Vous constaterez un aplatissement plus ou moins prononcé, du côté malade, un abaissement des fausses côtes qui descendent plus bas que celles du côté opposé et une modification du type respiratoire dont nous nous occuperons tout à l'heure. Si vous comparez alors les muscles des deux côtés, des différences, proportionnées à la durée de la maladie, vous apparaîtront. Ces différences seront plus faciles à apprécier sur les pectoraux et les grands dentelés. Le grand pectoral atteint fera une moindre saillie et son bord inférieur sera moins épais. Dans quelques cas où l'atrophie sera plus prononcée, les derniers faisceaux manqueront ou seront très grêles et séparés de la masse.

Pour le grand dentelé, chez les sujets maigres, la différence ne sera pas moins apparente. Dès l'abord vous serez frappé du petit

volume des digitations, qui sont si peu saillantes qu'il faut les chercher, et de leur rapprochement, en rapport avec la diminution des espaces intercostaux. Si vous mesurez la distance entre le bord supérieur de la première digitation et le bord inférieur de la dernière, vous trouverez une différence de 1 et quelquefois de 2 centimètres entre les deux côtés.

En arrière, les signes de l'atrophie ne sont pas moins nets, surtout à la partie supérieure du thorax. Faites asseoir le malade sur son lit ou plutôt sur une chaise, après l'avoir dépouillé de sa chemise, aussitôt vous verrez une dépression au-dessous de l'angle de l'omoplate, correspondant au retrait des côtes et à la diminution de volume du grand dorsal ; l'omoplate vous paraitra plus saillante et son bord spinal sera séparé du thorax et obliquement dirigé en bas et en dehors ; enfin les fosses sus-et sous-épineuses vous paraitront déprimées et, si vous les explorez avec les doigts, vous constaterez que les muscles qui recouvrent l'os sont moins épais.

Ces signes, dont je pourrais étendre la description, ne manquent jamais ; il faut seulement avoir l'attention de les rechercher, et savoir les découvrir quelquefois sous l'adipose qui les cache, surtout chez les femmes.

La mort m'a rarement permis de contrôler l'exactitude de mes observations, les pleurétiques ne mourant que très rarement pendant la première période de leur maladie ; cependant j'ai pu, depuis quelques mois, faire l'autopsie de deux pleurétiques qui ont succombé brusquement à des accidents intercurrents, trois semaines après le début de leur maladie. Je m'attachai surtout à l'étude comparative des muscles intercostaux qu'on ne peut explorer pendant la vie, et je constatai : le rapprochement des côtes, l'épaisseur moindre de la couche musculaire, la pâleur du tissu et la diminution de volume des faisceaux qui étaient moins larges, moins épais et plus distincts. Le rapprochement des côtes était surtout sensible au niveau des attaches chondro-sternales. Je ne puis rien dire du diaphragme qui est certainement intéressé, n'ayant jamais eu l'occasion de l'examiner ;

2° *Chez les pleurétiques la respiration est, de bonne heure,*

modifiée. — Ce fait est facile à constater. La palpation, l'inspection, la mensuration et l'auscultation le rendent manifeste. Prenez dans vos deux mains la poitrine de votre malade et cherchez à vous rendre compte de l'ampliation de chaque côté du thorax pendant l'inspiration. Vous constaterez que, pendant le premier temps, le côté malade reste immobile et qu'il ne se soulève qu'à la fin ; encore son soulèvement est-il beaucoup moindre que celui du côté opposé. Par l'inspection, ce phénomène sera plus apparent : vous verrez le côté malade presque immobile et toute l'ampliation se faire par le côté sain. Vous pourrez avoir une mesure approximative de la différence d'ampliation des deux côtés en appliquant un ruban métrique autour du thorax. Si vous faites fixer par un aide le ruban au niveau du rachis et que vous laissiez libres les deux chefs qui se croisent sur la ligne médiane antérieure, vous serez frappé de la différence de la course exécutée par chacun d'eux : tandis que le chef du côté sain exécutera une course de 2 à 3 centimètres, qui correspond à une ampliation équivalente, le chef du côté malade se déplacera de 1 centimètre à peine.

Enfin, l'auscultation elle-même vous apprendra que la respiration est profondément modifiée. On attribue d'ordinaire cette modification à l'abondance de l'épanchement ou, quand il a été résorbé, à l'engainement du poumon dans un exsudat fibrineux ; cette explication me parait insuffisante et je suis tenté de faire jouer un rôle à l'état des muscles qui se contractent moins bien qu'à l'état normal. Si on ausculte en effet le sommet du poumon, que la pleurésie n'a pas envahi, on constate que le murmure vésiculaire est moindre que du côté opposé. Cette diminution ne peut s'expliquer que par la moindre ampliation du thorax.

Si vous avez bien examiné votre pleurétique, vous avez constaté jusqu'ici : que son côté malade est plus ou moins aplati, qu'il se dilate beaucoup moins que le côté sain, enfin qu'il présente des dépressions qui paraissent dues à l'atrophie de certains muscles. Y a-t-il un lien entre tous ces faits ? L'un d'eux domine-t-il les autres ou sont-ils tous sous la dépendance d'une autre cause?

Les faits dont je m'occupe ne sont pas passés jusqu'ici inaperçus et on en a donné deux explications qui, isolées ou associées, ont

paru suffisantes. On a dit que les déformations du thorax et son immobilité relative sont dues à la pression atmosphérique et à la traction exercée par les adhérences établies entre les deux feuillets de la plèvre. Ces deux actions interviennent et je suis loin de les nier ; mais je crois qu'elles ne suffisent pas et, pour le prouver, j'invoque encore les faits cliniques. Prenez un pleurétique atteint depuis peu ; son poumon n'est pas encore engaîné, et s'il existe déjà des adhérences entre les deux plèvres, il ne peut être question de rétraction ; cependant le thorax est déjà immobile et un peu aplati. Pourquoi cela ? C'est que les muscles inspirateurs ne fonctionnent pas ou fonctionnent mal. C'est à leur inaction qu'est due l'immobilité du thorax et sa déformation. Et si l'on m'oppose que les muscles ne peuvent avoir subi encore une profonde altération, je répondrai qu'avant même de présenter une diminution de volume apparente, ils ont déjà subi d'importants troubles fonctionnels : ils se contractent moins bien, mais faradisez-les, et ils se contracteront moins vite et moins énergiquement que les muscles similaires du côté opposé. Cette parésie qui précède l'atrophie nous donne la clef des troubles précoces de la respiration et rend évident, me semble-t-il, le rôle important que joue l'atrophie des muscles dans les déformations du thorax ;

3° *L'atrophie des muscles joue un rôle prépondérant dans les déformations du squelette consécutives à la pleurésie.* — Si la parésie et l'atrophie existent, comme je crois l'avoir démontré, il est impossible qu'elles soient sans action sur le squelette. Comment et sous l'action de quelle force s'exécute le mouvement d'élévation des côtes et l'ampliation du thorax ? Sous l'action des muscles. Si donc certains muscles, ou ne se contractent pas, ou se contractent mal, les côtes qu'ils doivent soulever seront immobiles et s'élèveront insuffisamment, surtout si, comme c'est le cas chez les pleurétiques, la résistance à vaincre est plus grande ; mais ce n'est pas tout. Dans les déformations du squelette, il ne faut pas tenir compte seulement des muscles qui ne fonctionnent pas, il faut aussi tenir compte de l'action compensatrice de ceux qui se contractent. Or, ici les muscles du côté sain se contractent énergiquement et ils entraînent de leur côté

le thorax, puisque leurs homonymes, qui sont leurs antagonistes, ne leur résistent pas. C'est là une cause de destruction de la symétrie et non la moindre.

Je n'insiste pas davantage sur ce point tant il me paraît clair ; cependant, encore un mot sur le rôle des muscles après la guérison. L'épanchement est résorbé, toute trace d'inflammation a disparu, la poitrine est un peu déprimée et le murmure vésiculaire amoindri. Que va-t-il advenir? Il faut distinguer deux cas : si les muscles sont notablement atrophiés, ils ne pourront vaincre la résistance qu'opposent les fausses membranes qui entourent le poumon, ni résister à la traction qu'exercent les adhérences; aussi la déformation du thorax ira-t-elle croissant, c'est ce que j'ai souvent constaté; si, au contraire, les muscles sont peu atrophiés, ils recouvreront facilement leur activité fonctionnelle et leur volume, et suffiront à restituer le thorax dans sa forme primitive. J'ai eu l'occasion de le constater dans quelques cas. Il importe donc, quand le malade est guéri de sa pleurésie, de s'assurer de l'état de ses muscles comme cela importe dans les cas d'arthrite;

4° *L'atrophie musculaire est la cause indirecte de l'imprégnation et de la pullulation tuberculeuse dont les poumons, précédemment atteints de pleurésie, sont si souvent le siège.* — Sur ce point je serai moins affirmatif, car il ne s'agit que d'une hypothèse, mais d'une hypothèse à l'appui de laquelle je puis invoquer de puissants arguments.

L'expérience a appris à tous les cliniciens que les pleurétiques deviennent souvent tuberculeux et que les tuberculeux comptent non moins souvent dans leurs antécédents une pleurésie qui a siégé du même côté que la tuberculose. Cette association a paru si commune que, dans ces derniers temps, de bons observateurs ont soutenu que toutes les pleurésies sont tuberculeuses. Cette opinion est exagérée et je crois, pour mon compte, qu'il y a, outre les pleurésies rhumatismales, des pleurésies franchement inflammatoires; cependant la succession de la pleurésie et de la tuberculose est fréquente et il faut l'expliquer. Pour cela, tout ce que je viens d'exposer va nous servir.

Après sa guérison le pleurétique respire moins bien, l'air dans son poumon se renouvelle moins complètement, sa circulation

est modifiée. Ces conditions sont favorables à la fixation des germes morbides et à leur développement. Avec les idées actuellement régnantes sur la tuberculose, on peut donc dire que le poumon du pleurétique est un terrain tout préparé pour le développement du bacille; qu'une cause quelconque l'amène au contact de ce poumon altéré, il y trouvera un milieu de culture des plus favorables et il s'y fixera. En nous opposant donc à l'atrophie musculaire et aux déformations du thorax, nous diminuerons les chances qu'a tout pleurétique de devenir tuberculeux dans l'avenir.

Cet exposé, que j'ai dû nécessairement abréger, montre que nous ne nous trouvons pas ici en présence d'une simple curiosité pathologique et qu'il y a, au contraire, d'importantes conclusions pratiques à en tirer. Ces conclusions, que j'ai indiquées en commençant, les voici :

Puisque l'atrophie musculaire est si commune et peut entraîner des conséquences si graves pour le pleurétique, il faut la prévenir quand elle se prépare, l'arrêter quand elle s'établit, la combattre activement quand elle s'est produite.

TRAITEMENT. — 1° *Il faut prévenir l'atrophie des muscles quand elle se prépare.* — Quand on constate que le côté atteint est immobile et que cette immobilité n'est pas due, comme cela arrive assez souvent, à la douleur, on peut être assuré que les muscles sont déjà parésiés. Il est temps d'intervenir. Il faut d'abord abréger la durée de la pleurésie et évacuer le liquide épanché, s'il ne tend pas à se résorber. Cela fait, on doit surveiller les muscles, engager le malade à s'en servir et, pour cela, lui donner des instructions précises; si la pleurésie se prolonge et si la parésie est prononcée, il faut recourir à la faradisation;

2° *Il faut arrêter l'atrophie quand elle s'établit.* — Cette indication se confond avec la précédente et les moyens dont nous disposons pour la remplir sont les mêmes;

3° *Il faut combattre activement l'atrophie quand elle s'est produite.* — Nous disposons de quatre moyens principaux pour remplir cette indication. Ils sont tous efficaces et méritent, dans les cas graves, d'être simultanément employés. Ce sont les stimulants généraux qui réveillent la nutrition et agissent ainsi indirectement sur les muscles atrophiés, la gymnastique respi-

ratoire méthodiquement pratiquée; la stimulation directe des muscles atteints et particulièrement la faradisation; enfin, l'action directe sur le poumon par l'air comprimé.

Je n'ai rien à dire des stimulants généraux, ni de l'excitation directe des muscles et de la faradisation. Ces moyens d'action sont connus et il suffit de dire qu'ils sont applicables au cas dont je parle pour qu'on sache comment ils doivent être appliqués.

J'insisterai un peu plus sur l'efficacité de la gymnastique respiratoire et sur l'action de l'air comprimé.

Le pleurétique, pendant toute sa maladie, a usé surtout de son poumon sain; sa guérison obtenue, il est porté à respirer comme pendant sa maladie. C'est plus facile puisque les muscles sont plus vigoureux et que le poumon n'oppose aucune résistance; aussi vous pouvez être assuré qu'il n'y manquera pas. Pendant la nuit il se couchera sur le côté malade, le mettant ainsi dans des conditions bien plus défavorables pour respirer; pendant le jour c'est le côté sain qu'il libérera et, pour rendre son fonctionnement plus libre, il ira jusqu'à s'incliner inutilement du côté malade et l'immobilisera ainsi davantage. Il faut l'avertir et lui faire comprendre le risque qu'il court en agissant ainsi. Il comprendra aussi bien que le convalescent d'une arthrite du genou auquel vous dites que, s'il ne veut boiter, il doit se servir de sa jambe malgré sa faiblesse et même à cause de sa faiblesse. Vous exigerez donc de lui que son côté malade soit toujours actif et même qu'il soit, s'il est possible, plus actif que le côté sain; pour cela vous vous occuperez de la position à prendre pendant la nuit, pendant la marche, pendant le travail, et vous réglerez toujours cette position de telle sorte que le côté malade soit condamné à une activité forcée. Comme il ne faut pas tenir compte seulement de l'état des muscles, mais aussi de la résistance qui leur est opposée par l'épaississement de la paroi thoracique et par l'engainement du poumon par des fausses membranes, s'il y a une grande résistance il faudra recourir aux grands efforts d'inspiration comme y ont recours les asthmatiques pendant leurs accès de dyspnée. Pour cela il faudra apprendre aux malades à se servir de leurs pectoraux, de leurs dentelés et même de leurs muscles du cou. Vous leur recommanderez de faire ainsi, plusieurs fois

par jour, de fortes inspirations et vous vous assurerez des résultats obtenus en mesurant fréquemment la capacité des poumons. Comme moyen adjuvant, rien ne me paraît plus efficace que l'air comprimé. Les spécialistes le préconisent et le disent souverain ; mais je n'ai pas trouvé dans leur traité d'observations probantes. Je n'en connais que deux qui m'ont été communiquées par le docteur Dever, directeur de l'établissement pneumatique de Bruxelles. Cependant, je ne crois pas, quoi qu'on en dise, que les bains d'air comprimé aient une puissance particulière pour augmenter la capacité du poumon et vaincre la résistance que les fausses membranes opposent à son expansion.

Pour atteindre ce résultat spécial je m'adresserais plus volontiers à l'appareil de Waldenburg ou à tout autre analogue : l'inspiration dans un milieu où l'air est comprimé, le corps et la paroi thoracique étant soumis à la pression normale, me paraissent seuls réaliser les conditions nécessaires pour produire l'expansion forcée du poumon. Du reste, mes expériences sur ce point sont trop récentes et trop incomplètes pour que j'en tire des conclusions. S'il y a lieu, je les ferai connaître plus tard. Aujourd'hui je me borne, pour conclure, à reproduire les propositions déjà énoncées dans ce travail :

1° Chez les pleurétiques l'atrophie des muscles du thorax est fréquente et précoce ;

2° Cette atrophie entraîne de bonne heure des troubles de la respiration ;

3° Plus tard elle a une grande part dans les déformations du thorax ;

4° Elle favorise ainsi, indirectement, l'imprégnation et la pullulation tuberculeuse chez les pleurétiques.

Il faut donc :

(*a*) Prévenir l'atrophie quand elle se prépare ;

(*b*) L'arrêter quand elle s'établit ;

(*c*) La combattre activement quand elle s'est produite. Pour cela on doit recourir : aux stimulants généraux, aux stimulants locaux et particulièrement à la faradisation, à la gymnastique respiratoire, à l'air comprimé, etc.

SUR
L'HERPOLHODIE DANS LE CAS D'UNE SURFACE
DU SECOND DEGRÉ QUELCONQUE

PAR

M. le Cte de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

Le théorème que je donne dans le mémoire précédent (*) au sujet de l'herpolhodie de Poinsot et que j'ai également démontré, en me basant sur les travaux de M. Hermite, dans une communication à l'Académie des sciences du 24 novembre dernier, a été depuis l'objet de travaux assez nombreux.

En particulier, M. Mannheim a fait voir que, s'il en est ainsi pour l'herpolhodie de Poinsot, il n'en est plus de même lorsque l'ellipsoïde roulant est quelconque.

Plus récemment M. Darboux a étendu cette étude au cas où la surface roulante est une surface du second degré quelconque et il a donné la condition pour que l'herpolhodie ait alors des points d'inflexion.

Je me propose aujourd'hui pour une surface du second degré quelconque de faire voir que les résultats du précédent mémoire peuvent être appliqués à ce problème sans aucun changement.

Seulement, dans ce cas les quantités A, B, C ne sont plus astreintes aux conditions d'être positives et que l'une quelconque d'entre elles soit plus petite que la somme des deux autres : ce sont des quantités quelconques.

J'obtiendrai ensuite très simplement dans ce cas la condition pour que l'herpolhodie ait ou n'ait pas de points d'inflexion.

(*) *Sur le mouvement d'un solide,* etc (ANNALES DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, t. IX, 2e partie, pp. 49 et suiv.)

Soit donc une surface du second degré quelconque dont l'équation, en la supposant rapportée à ses axes, est

$$(I) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dont le centre est fixe et qui est assujetti à rouler sur un plan tangent fixe situé à une distance d du centre, le mouvement se faisant de telle façon que l'axe instantané passe constamment par le point de contact de la surface et du plan fixe et que la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée soit à chaque instant proportionnelle au rayon vecteur ρ joignant le centre au point de contact de la surface et du plan fixe.

Adoptons, pour étudier ce mouvement, les coordonnées d'Euler en prenant l'axe des z du système de comparaison fixe perpendiculaire au plan tangent sur lequel roule la surface.

Désignons toujours par p, q, r les composantes de la vitesse angulaire ω suivant les axes de la surface.

Ceci posé, les trois équations d'Euler qui donnent p, q, r en fonction de φ, θ, ψ et de leurs dérivées, c'est-à-dire les équations (4), (5) et (6) du mémoire précédent, subsistent sans aucun changement; il suffit pour s'en convaincre de se reporter à la démonstration qui permet de les obtenir et qui repose uniquement sur ce fait que ω peut être regardé soit comme la résultante de p, q et r, soit comme celle de $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.

Soit maintenant

$$(II) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Axx' + Byy' + Czz' = 1$$

l'équation du plan tangent fixe, l'axe instantané passant par le point de contact (x', y', z'); on a :

$$x' = \frac{\rho p}{\omega}, \quad y' = \frac{\rho q}{\omega}, \quad z' = \frac{\rho r}{\omega}.$$

Mais par hypothèse on a aussi

$$\frac{\omega}{\rho} = h,$$

h désignant une constante.

Il vient donc

$$x' = \frac{p}{h}, \quad y' = \frac{q}{h}, \quad z' = \frac{r}{h},$$

et l'équation du plan tangent deviendra

$$\text{(III)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Apx + Bqy + Crz = h.$$

Si nous exprimons maintenant que le point de contact x', y', z' est sur la surface, nous aurons

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2.$$

C'est l'équation des forces vives, c'est-à-dire l'équation (7) du mémoire précédent.

Exprimons maintenant que la distance du plan (III) à l'origine est fixe et égale à d, nous aurons :

$$d = \frac{h}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}$$

ou

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \frac{h^2}{d^2}.$$

C'est-à-dire qu'en posant

$$\frac{h}{d} = M,$$

on a

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = M^2,$$

qui est l'équation des moments des quantités de mouvement, équation (8) du mémoire.

Remarquons ici que l'on a pour l'expression de d en fonction de M et h

$$\text{(IV)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d = \frac{h}{M}.$$

Mais d'autre part la normale au plan fixe (III) fait avec les axes mobiles des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr,$$

et comme, d'ailleurs, ces cosinus sont égaux à

$$\sin\theta \sin\varphi, \quad \sin\theta \cos\varphi \quad \text{et} \quad \cos\theta,$$

puisque l'axe des z du système de comparaison fixe est dirigé suivant la normale à ce plan tangent fixe, on a :

$$\frac{\sin\theta\sin\varphi}{Ap}=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{Bq}=\frac{\cos\theta}{Cr}=\frac{1}{M},$$

d'où l'on déduit les équations (9), (10) et (11) du mémoire précédent.

Enfin, si nous considérons le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent fixe, ces coordonnées par rapport aux axes mobiles sont

$$d\frac{Ap}{M},\quad d\frac{Bq}{M},\quad d\frac{Cr}{M}.$$

Or la vitesse *absolue* de ce point est nulle. Nous aurons par suite en exprimant qu'il en est ainsi :

$$d\frac{A}{M}\frac{dp}{dt}+qd\frac{Cr}{M}-rd\frac{Bq}{M}=0,$$

$$d\frac{B}{M}\frac{dq}{dt}+rd\frac{Ap}{M}-pd\frac{Cr}{M}=0,$$

$$d\frac{C}{M}\frac{dr}{dt}+pd\frac{Bq}{M}-qd\frac{Ap}{M}=0,$$

et en divisant tout par $\frac{d}{M}$, on retombe sur les trois premières équations d'Euler, c'est-à-dire sur les équations (1), (2) et (3) du mémoire précédent.

On voit donc que les équations (1) à (11), qui nous ont servi de point de départ dans le mémoire précédent, s'appliquent toutes sans aucun changement au problème que nous considérons aujourd'hui.

Ceci fait, je pose

$$A=\frac{1}{\lambda},\quad B=\frac{1}{\mu},\quad C=\frac{1}{\nu},$$

et je remplace M^2 par sa valeur en fonction de d^2

$$M^2 = \frac{h^2}{d^2}.$$

λ, μ, ν seront les carrés des demi-axes ; par suite, d'après les données géométriques du problème, d^2 sera toujours compris entre λ et ν.

On choisira alors l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

$$(\text{I}') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda < \mu < d^2 < \nu$$

ou

$$(\text{II}') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda > \mu > d^2 > \nu,$$

suivant que d^2 sera plus grand ou plus petit que μ.

Alors, en remplaçant A, B, C et M^2 par leurs valeurs

$$\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\nu} \quad \text{et} \quad \frac{h^2}{d^2},$$

on reconnaitra que les différentes quantités qui figurent dans les formules et qui doivent être positives le seront encore dans les deux hypothèses (I′) et (II′), quels que soient les signes de λ, μ, ν; il en sera en particulier ainsi des valeurs de k^2 et k'^2 et de la quantité sous le radical dans l'expression de t en fonction de u, par suite la transformation sera encore applicable.

Si donc nous considérons l'herpolhodie, les formules données dans le mémoire précédent seront applicables et on reconnaitra d'abord bien facilement que dans ce cas, comme dans le cas étudié dans le mémoire, cette courbe ne présente jamais de points de rebroussement (*).

Cherchons maintenant si elle peut avoir des points d'inflexion.

(*) Page 27 du précédent mémoire.

L'équation qui fournit les points d'inflexion est (*)

$$dn^2 u = \frac{k'^2 (Ah^2 - M^2)(A + B - C)}{(A - C)\left[(A + B + C)h^2 - 2M^2\right]}.$$

Pour être acceptable cette valeur de $dn^2 u$ devra être comprise entre k'^2 et 1.

Exprimons qu'il en est ainsi, en remplaçant en même temps A, B, C et M^2 par $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$ et $\frac{h^2}{d^2}$, afin de tenir compte des hypothèses (I') et (II').

Nous aurons les deux inégalités suivantes :

$$\text{(V)} \quad \ldots \quad \frac{\lambda}{d^2}\,\frac{\nu - d^2}{\nu - \lambda}\,\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - \frac{2}{d^2}} > 0$$

et

$$\text{(VI)} \quad \ldots \quad \frac{\mu}{d^2}\,\frac{\nu - d^2}{\nu - \mu}\,\frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - \frac{2}{d^2}} > 0.$$

Il faudra tenir compte en plus de ce fait que λ, μ, ν et d^2 doivent vérifier les inégalités (I') ou (II').

Considérons maintenant les différentes surfaces du second degré.

Soit d'abord l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a > b > c.$$

Dans ce cas il ne peut y avoir de points d'inflexion avec l'hypothèse (II').

(*) Page 32 du précédent mémoire.

Cette hypothèse donne, en effet :

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{d^2} < \frac{1}{\nu}.$$

On aurait par suite :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} > 0,$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} < 0,$$

et les inégalités (V) et (VI) ne peuvent par conséquent être satisfaites en même temps.

Considérons maintenant l'hypothèse (I′) ; elle donnera :

$$\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu} > \frac{1}{d^2} > \frac{1}{\nu}$$

et par suite :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} > 0.$$

Pour qu'il y ait des points d'inflexion, on devra donc avoir :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - \frac{2}{d^2} > 0$$

et

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} > 0,$$

mais à cause de l'inégalité

$$\frac{1}{d^2} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\lambda}$$

la première est satisfaite d'elle-même.

Pour qu'il y ait des points d'inflexion dans le cas de l'ellipsoïde, les conditions sont donc :

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2},$$

$$d > b.$$

Car ici, à cause de l'hypothèse (I'), on a :

$$\lambda = c^2, \quad \mu = b^2, \quad \nu = a^2.$$

Si l'on remarque que le lieu des points de l'ellipsoïde pour lesquels le plan tangent est à une distance b du centre est donné par la rencontre de cette surface et des plans

$$x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^4} - z^2 \frac{b^2 - c^2}{c^4} = 0,$$

on peut dire que la deuxième inégalité exprime que l'axe instantané est situé dans l'angle dièdre formé par ces plans qui contient le grand axe de l'ellipsoïde.

Soit maintenant l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b.$$

Il ne peut alors y avoir de points d'inflexion avec l'hypothèse (I').

Car, λ étant négatif, l'inégalité (V) exigerait

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - \frac{2}{d^2} > 0,$$

et par suite l'inégalité (VI) exigerait

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} > 0,$$

ce qui est impossible, puisque l'on a

$$\frac{1}{\lambda} < 0, \quad \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\nu}.$$

Considérons donc maintenant l'hypothèse (II'). ν est négatif et on a :

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{\nu} < 0.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} - \frac{2}{d^2} < 0.$$

L'inégalité (VI) est donc vérifiée.

L'inégalité (V) exige par suite

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} < 0.$$

Comme ici

$$\lambda = a^2, \quad \mu = b^2, \quad \nu = -c^2,$$

les conditions pour qu'il y ait des points d'inflexion seront :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} \quad \text{et} \quad d < b.$$

La dernière inégalité exprime que le plan tangent fixe est à une distance du centre plus petite que b, mais, sous une autre forme, elle exprime aussi que l'axe instantané est situé dans l'angle dièdre des plans

$$x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^4} - z^2 \frac{b^2 + c^2}{c^4} = 0,$$

qui contient l'axe non transverse. On le verrait en raisonnant comme dans le cas de l'ellipsoïde.

Remarquons que dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe le

roulement est pratiquement impossible, puisque le plan tangent coupe la surface.

Soit enfin l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad b<c;$$

dans ce cas, d^2 étant positif, la seule hypothèse admissible est évidemment (I')

$$\lambda<\mu<d^2<\nu,$$

et on aura

$$\lambda=-c^2, \quad \mu=-b^2, \quad \nu=a^2.$$

Mais

$$\frac{1}{\nu}<\frac{1}{d^2}, \quad \frac{1}{\mu}<\frac{1}{\lambda}<0,$$

donc

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\mu}>0,$$

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}-\frac{2}{d^2}<0;$$

l'inégalité (VI) est donc satisfaite et (V) exige

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}>0$$

ou

$$\frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}.$$

C'est dans ce cas la seule condition.

LA
THÉORIE DU NAVIRE

PAR

M. Albert BAULE

lieutenant de vaisseau de la marine française.

Plusieurs géomètres célèbres ont traité avec succès certaines questions relatives à la théorie du navire; mais, à côté de quelques résultats bien établis, cette science présente encore beaucoup de points obscurs sur lesquels l'analyse mathématique pourra fournir de précieuses indications. Il est donc utile d'attirer l'attention des mathématiciens étrangers à la marine sur ces problèmes intéressants et difficiles. C'est dans ce but que je présente ce court résumé à MM. les membres de la première section.

L'étude des divers états d'équilibre ou de mouvement d'un bâtiment de mer nécessite tout d'abord la connaissance exacte des formes de la carène sur laquelle s'exercent les pressions de l'eau. On choisit à cet effet trois plans de projection perpendiculaires entre eux : un plan horizontal parallèle à la flottaison (*), un autre vertical et latitudinal et un troisième vertical et longitudinal. Sur le premier sont tracés les contours extérieurs des sections horizontales ou *lignes d'eau,* sur le deuxième les sections transversales ou *couples* et sur le dernier les sections longitudinales.

Ces sections convenablement distribuées définissent nettement la surface extérieure de la carène, et permettent d'obtenir, par l'application plus ou moins laborieuse des formules connues

---

(*) Quelquefois parallèle à la quille.

d'approximation, diverses données très importantes, telles que le déplacement et le *centre de carène* (centre de gravité du volume déplacé) correspondant à diverses lignes d'eau. On peut ensuite, en supposant le déplacement constant, déterminer les centres de carène c_0, c_1, c_2, .. relatifs à diverses inclinaisons, indiquées dans la figure ci-jointe, où le navire est représenté par la projection du plan latitudinal passant par son centre de gravité G. Ce plan contient évidemment le centre de carène c_0 correspondant à une inclinaison nulle. Nous supposerons, pour plus de simplicité, et sans nous écarter beaucoup de l'exactitude, qu'il contienne également les centres c_1, c_2,... relatifs à différentes inclinaisons. Ces points détermineront une courbe dite *courbe des centres de carène,* dont chaque élément sera parallèle à la flottaison correspondante (*). La courbe formée par les intersections successives o, o', o'',... des flottaisons est appelée l'enveloppe des flottaisons.

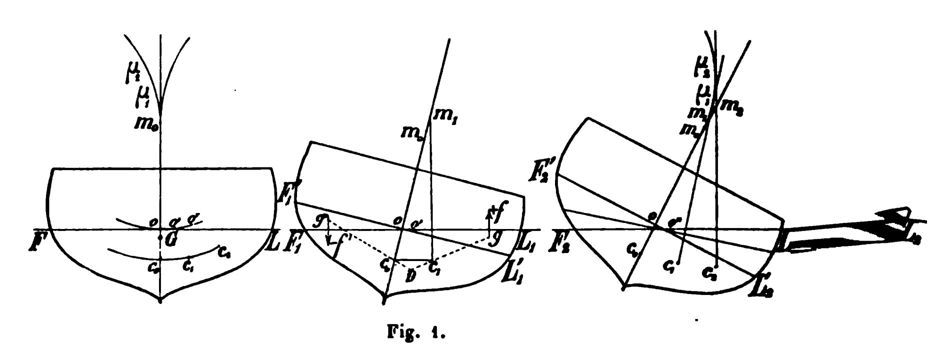


Fig. 1.

La stabilité, cette qualité essentielle qui permet au navire de se redresser spontanément après avoir subi une inclinaison passagère, exige, comme on sait, que les métacentres m_0, m_1, m_2...,

(*) En effet, la poussée verticale de bas en haut appliquée en c_1 est la résultante de trois forces parallèles : l'une, appliquée en c_0, égale au poids du navire et dirigée vers le haut; les deux autres, f et f', de sens respectivement opposés, égales toutes deux au poids du volume déplacé par un des onglets équivalents $F_1o'F'_1$, $L_1o'L'_1$, l'un émergé, l'autre immergé, et appliquées aux centres de gravité, g et g', de ceux-ci. Les règles de la composition des forces montrent immédiatement que la ligne c_0c_1 est parallèle à la ligne gg' qui devient horizontale, à un angle infiniment petit près, si l'inclinaison est infiniment petite.

c'est-à-dire les points d'intersection de l'*axe du navire* et des verticales passant par les divers centres de carène, soient situés au-dessus du centre de gravité. Plus la distance du centre de gravité au métacentre sera grande, plus le navire sera stable, et les moments des couples redresseurs seront respectivement égaux au produit du poids, P, du navire, par les projections horizontales des lignes Gm_1, Gm_2...; soit $P \times Gm \times \sin i$, i représentant l'inclinaison.

Les intersections successives des *verticales* menées par c_1, c_2... déterminent la *courbe métacentrique* $m_0\mu_1\mu_2$... C'est évidemment la développée de la courbe des centres de carène. Par suite de la symétrie latitudinale du navire, la courbe métacentrique est composée de deux branches symétriques et tangentes à l'axe en un point m_0 appelé *premier métacentre*, qui est le métacentre correspondant à une inclinaison infiniment petite. La distance du premier métacentre au centre de carène est désignée par r; celle du centre de gravité G au centre de carène c_0 est représentée par a. Il est clair que les tangentes menées aux divers points de ces courbes détermineront, par leur intersection avec l'axe, les métacentres correspondant aux diverses flottaisons; elles définiront donc nettement la stabilité. Les métacentres seront d'autant plus élevés, pour une même inclinaison, que l'*écart latéral* sera plus accentué. Or cet écart produit par l'immersion et l'émersion des onglets équivalents $F_1o'F'_1$, $L_1o'L'_1$ est proportionnel, d'une part, à leur volume, et, d'autre part, à la distance gg' de leurs centres de gravité. Il s'ensuit que la hauteur du métacentre au-dessus du centre de carène varie comme la longueur du navire et comme le cube de la largeur (*). Cette dimension est donc l'élément essentiel de la stabilité.

On peut distinguer, si l'on veut, deux sortes de stabilité : la stabilité de formes due à la distance du centre de carène au

---

(*) Plus exactement, on a $r = \frac{2}{3V} \int y^3 dx$, formule dans laquelle r représente la distance, c_0m_0, V, le déplacement du navire, y la demi-largeur aux différents points de la flottaison et x l'abscisse longitudinale. Le signe d'intégration s'étend à toute la demi-flottaison.

premier métacentre et représentée par Pr, et la stabilité de poids, Pa. Celle-ci devient négative quand le centre de gravité est au-dessus du centre de carène, ce qui est le cas général. La stabilité totale est donc P$(r - a)$. On peut modifier dans de certaines limites la longueur $r - a$ par la répartition du lest et remédier ainsi à un léger défaut de stabilité de formes. Mais si cette ressource ne suffit pas, il faut élever le métacentre en élargissant artificiellement la flottaison au moyen d'un *soufflage*. Cette opération fort nuisible à la marche a dû être pratiquée sur le dernier trois-ponts à voiles construit en France, le *Valmy*.

On pourrait sans inconvénient abaisser le centre de gravité d'un bateau destiné à naviguer en eau calme; mais, comme on le verra tout à l'heure, les conditions imposées par le roulis conduisent, au contraire, à réduire le plus possible la longueur du bras de levier de stabilité. Dans la pratique on considère celle-ci comme constante pour toutes les inclinaisons. Cette hypothèse n'entraine aucun danger quand la surface extérieure des murailles est continue et à peu près verticale au-dessus de la flottaison; car, la courbe métacentrique étant alors convexe vers l'axe, le métacentre s'élève à mesure que l'inclinaison augmente. Mais, s'il existe quelque brusque rentrée comme il en est de plusieurs cuirassés, la courbe métacentrique présentera aussi quelque irrégularité à laquelle pourra correspondre un abaissement considérable du métacentre. La perte, sous voiles, du cuirassé anglais *Captain* est due sans doute à un effet de ce genre. Il est donc indispensable d'étudier minutieusement ces courbes pour les navires d'un type nouveau. Pour les anciens modèles il suffit, en général, de proportionner le moment de voilure Sh, c'est-à-dire le produit de la surface S de la voilure par la hauteur h de son centre de gravité au-dessus de celui du navire, au moment de stabilité, P$(r - a)$. Si ces moments sont dans un même rapport sur plusieurs bâtiments de types différents, ceux-ci prendront à peu près la même inclinaison pour le même vent et la même allure. Mais il faut remarquer que deux navires de dimension différente et de formes tout à fait semblables ne peuvent avoir

des voilures proportionnelles. En effet, la force du vent par mètre carré étant la même pour tous deux, les moments d'inclinaison seraient entre eux, dans le cas de voilures semblables, comme le cube des dimensions linéaires. Mais, les moments de stabilité étant proportionnels aux quatrièmes puissances de ces dimensions, le petit bâtiment inclinera davantage. Ceci explique l'instabilité des petits cotres, goélettes, etc., qui sillonnent les pièces d'eau des promenades publiques. Ces petites coques assez fidèlement copiées sur des grandes ne peuvent supporter leur voilure, généralement proportionnelle à celle de leur modèle, bien que leur stabilité de poids soit considérablement accrue par l'addition d'une quille de plomb. Cependant un petit bâtiment de forme convenable peut et doit être relativement plus voilé qu'un grand; car, en premier lieu, il peut supporter avec moins d'inconvénients un excès de stabilité; ensuite, les moments d'inertie et, par conséquent, les *fatigues* dues aux roulis sont, à mâtures semblables, dans le rapport des cinquièmes puissances des dimensions linéaires. La petite mâture pourra donc être relativement plus élevée sans que sa solidité en soit compromise.

C'est pendant les mouvements violents occasionnés par la grosse mer que les liaisons du bâtiment sont soumises aux plus rudes épreuves. Qu'on s'imagine la lourde mâture d'un vaisseau à voiles arrêtée plus ou moins brusquement à chaque inclinaison extrême après avoir décrit d'un bord à l'autre un énorme arc de cercle, ou bien un canon de 100 tonnes s'appuyant contre les parois de sa tourelle de toute la force de sa vitesse acquise augmentée d'une portion considérable de son poids, et on comprendra immédiatement combien il importe de réduire l'amplitude des roulis et la variation de la vitesse angulaire. Plusieurs géomètres ou ingénieurs ont publié à ce sujet de remarquables travaux (ceux de MM. de Saint-Venant et de Bénazé sont des meilleurs), dont l'analyse ne peut trouver place dans ce court résumé. Je dirai simplement que le mouvement oscillatoire d'un bâtiment, en eau calme, autour d'un axe horizontal et longitudinal passant par son centre de gravité, peut être assimilé à celui d'un pendule

simple de longueur égale au moment d'inertie Σmr^2 divisé par le moment de stabilité $P(r - a)$, soit

$$\frac{\Sigma mr^2}{P(r - a)}.$$

Par suite, pour diminuer les accélérations angulaires, causes des forces d'inertie nuisibles, il faudrait diminuer le bras de stabilité et augmenter le moment d'inertie en donnant aux divers poids de l'armement la position la plus excentrique qu'il soit possible. Cette opération entrainerait comme conséquence accessoire l'augmentation de la durée du roulis, circonstance favorable, comme on va le voir. A la mer les conditions du problème sont beaucoup plus complexes : les poussées du liquide n'agissent plus suivant la verticale comme en eau calme, mais, probablement, dans une direction normale à des surfaces ondulées, dites *surfaces de niveau dynamique*, le long desquelles la pression est constante; les vitesses différentes des couches liquides que traverse la carène doivent contribuer au mouvement oscillatoire; l'axe instantané de rotation ne passe pas par le centre de gravité; enfin l'irrégularité de la mer devient une autre cause de difficulté. Néanmoins l'expérience prouve que la durée des roulis, quelle que soit leur amplitude, est sensiblement constante pour un même navire tant que son arrimage n'est pas modifié. Il est naturel d'admettre, comme l'indique du reste le calcul, que, si un bâtiment est soumis à des ondulations régulières se succédant à des intervalles de temps égaux à la durée de son roulis propre, les inclinaisons soient successivement augmentées et puissent atteindre des limites dangereuses. Il faut donc diminuer les chances de rencontrer un pareil synchronisme. On y parvient en allongeant autant que possible la durée du roulis par la diminution de la stabilité et l'accroissement du moment d'inertie. Ainsi la période de roulis du cuirassé de premier rang, l'*Océan*, étant de 20 secondes, et celle des plus longues lames observées de 14 secondes, ce vaisseau ne rencontrera probablement jamais de lame synchrone. Par le fait, ses roulis n'ont jamais dépassé 7°,

tandis que les roulis de 30° et de 35° n'étaient pas rares sur les anciens vaisseaux. Le bras de levier de stabilité de ceux-ci était environ $1^m,50$; celui de l'*Océan* est réduit à $0^m,50$. Ce cuirassé n'en possède pas moins une stabilité suffisante, car son poids est de 7334 tonneaux. Une pareille réduction ne pourrait évidemment pas être opérée sur un petit bâtiment sans qu'il en devienne tout à fait instable. Il rencontrera donc tôt ou tard des lames synchrones, qui pourraient lui imprimer des roulis excessifs si elles se succédaient à intervalles réguliers. Cette régularité est heureusement assez rare ; elle pourrait du reste être interrompue par un changement momentané dans la direction de la route.

Il est fort difficile de déterminer les positions occupées par l'axe instantané de rotation pendant le mouvement oscillatoire. On peut cependant s'en faire une idée par les considérations suivantes. Si le navire s'inclinait très lentement, en eau calme, la trace de l'axe instantané sur le plan latitudinal serait l'enveloppe des flottaisons. Si on suppose au contraire l'oscillation très rapide, les forces d'inertie entrent en jeu, la constance du déplacement n'est plus maintenue, et l'axe instantané doit être voisin du centre de gravité. On peut conclure de ceci qu'on atténuera les déplacements évidemment nuisibles de l'axe de rotation en rapprochant le plus qu'on pourra le centre de gravité de la flottaison. On détermine la position de ce centre en observant l'inclinaison i produite, en eau calme, par un déplacement de poids dont on mesure le moment. En égalant celui-ci au couple de stabilité $P(r - a)\sin i$, on obtient la distance du centre de gravité en contre-bas du métacentre. On la modifie ensuite, s'il y a lieu, par une disposition convenable du lest. On peut aussi imprimer artificiellement au navire un mouvement oscillatoire, dont la durée permettra de calculer approximativement le moment d'inertie.

On peut étudier de même la stabilité longitudinale et construire les courbes métacentriques correspondantes. Celles-ci ne seront pas symétriques à cause des formes différentes de l'avant et de l'arrière. On s'en servira surtout pour calculer

l'inclinaison produite par un déplacement de poids dans le sens longitudinal. Cette stabilité est toujours suffisante au point de vue de la sécurité; on n'a donc à s'en préoccuper qu'en ce qui concerne le *tangage,* c'est-à-dire l'oscillation autour d'un axe horizontal latitudinal. La position de cet axe variera, comme pour le roulis, entre l'enveloppe longitudinale des flottaisons et le centre de gravité; mais ses déplacements seront faibles et on pourra admettre qu'il passe toujours par ce point. Or, le rapport du moment d'inertie au moment de stabilité, dans le sens longitudinal, est en général plus faible que dans le sens latitudinal. Les tangages seront donc en général plus courts et plus vifs que les roulis et affecteront plus désagréablement les personnes peu habituées à la mer, surtout si elles se placent imprudemment aux extrémités du navire où les variations de la vitesse oscillatoire sont plus sensibles. Pour diminuer la vivacité de ces mouvements, il faudrait augmenter le moment d'inertie longitudinal en éloignant les poids vers les extrémités; mais une pareille opération serait fort nuisible au point de vue de la fatigue des liaisons longitudinales. En effet, les tranches latitudinales des extrémités, étant plus fines que celles du milieu, ne sont pas soutenues, de bas en haut, par une poussée aussi forte. Leur charge trop considérable donnerait lieu à un couple tendant à *arquer* le bâtiment. La meilleure disposition des poids serait celle qui donnerait à chaque tranche une charge égale à son déplacement; mais les circonstances n'en permettent presque jamais la réalisation. Il faut donc calculer l'effet des charges inégales et renforcer les liaisons aux points où l'effort de rupture est maximum. On prévient de même les flexions que tendent à produire les ondulations de la mer, sur lesquelles le bâtiment est soutenu tantôt par les extrémités, tantôt par son milieu.

L'étude de la stabilité est d'autant plus importante que le navire est grand et lourdement armé. La question était plus simple autrefois, car, indépendamment d'un armement plus léger, les vaisseaux à voiles possédaient dans leur voilure un modérateur naturel à la violence des roulis. La qualité maitresse était celle de bien porter la voile, afin d'utiliser au mieux la force

du vent. A ce point de vue nos pères ont obtenu d'excellents résultats, car certains navires, cités par de vieux auteurs, ont atteint des vitesses supérieures à celle du vent qui les poussait. Cette assertion, étonnante de prime abord, perdra son apparence paradoxale par l'étude de l'effet des voiles.

La voilure est répartie en surfaces trapézoïdales superposées et symétriques par rapport au mât qui les porte, dites *voiles carrées,* et en surfaces non symétriques dites *voiles auriques.* Toutes ces surfaces partielles, orientées à peu près parallèlement quand le navire est en marche, donnent ensemble, si on néglige le frottement latéral de l'air, une résultante perpendiculaire au plan déterminé par un mât et ses vergues, et appliquée à peu près au centre de gravité de la surface de la voilure. Cette force, pour produire tout son effet utile, doit être horizontale; par conséquent le plan du mât et de ses vergues doit être vertical quand le navire prend son inclinaison naturelle. Ceci conduit à donner à la mâture une inclinaison vers l'arrière d'autant plus prononcée que la *bande* (inclinaison sous le vent) habituelle du navire sera plus considérable. La résultante des voiles donne lieu à deux composantes : l'une parallèle à la quille et dirigée vers l'avant, l'autre dirigée *sous le vent.* Comme la résistance latérale de l'eau l'emporte beaucoup sur la résistance directe, la vitesse en avant est supérieure à la vitesse latérale dite *dérive.* Ainsi un bon voilier naviguant *au plus près du vent* par une brise modérée dérive de 5° environ, c'est-à-dire que la direction de son sillage fait un angle de 5° avec son axe longitudinal. Mais à l'effet latéral des voiles il faut ajouter, dans toutes les routes obliques, la poussée du vent sur le grément, la mâture et la coque ; l'effet en sera d'autant plus sensible que la voilure sera plus réduite. Si cette réduction dépasse une certaine limite, la dérive l'emporte sur la vitesse directe. Ainsi un navire en cape, c'est-à-dire présentant son travers au vent, et contraint par l'état du temps à n'établir qu'une ou deux voiles spéciales, fait un sillage à peu près perpendiculaire à son axe longitudinal. Disons en passant que cette grande dérive est alors avantageuse, car elle occasionne du côté du vent une série de tourbillons qui empêchent la mer de déferler.

Le navire est ainsi garanti de dangereux coups de mer, dont il serait inévitablement assailli si, sa vitesse en avant étant imprudemment augmentée, il laissait derrière lui ces remous protecteurs.

La dérive est, en général, insensible dès que le vent atteint le travers; mais la composante latérale des voiles n'en subsiste pas moins et donne lieu, par conséquent, à une réaction égale de la part du liquide. Celle-ci est appliquée en un point du plan longitudinal, appelé *centre de dérive,* toujours situé en avant du centre de gravité de la partie immergée de ce plan. Pour que le navire puisse se maintenir en route sans une inclinaison permanente et évidemment nuisible du gouvernail, il faut que le plan vertical contenant la résultante des réactions de l'eau passe par le centre de voilure. Celui-ci doit donc être situé à peu près audessus du centre de dérive, dont on peut du reste faire varier la position en modifiant les tirants d'eau de l'avant et de l'arrière. Le tirant d'eau de l'arrière est toujours plus fort que celui de l'avant, sans quoi il ne serait pas possible d'utiliser les voiles de poupe. La pente de quille généralement adoptée est environ $0^m,01$ par mètre. Dans ce cas le centre de voilure est bien placé lorsqu'il tombe, en avant du milieu, d'une longueur variable entre le 10me et le 20me de la longueur totale. La voilure se trouve ainsi convenablement équilibrée pour certaines circonstances d'allure et de vent; mais, si la brise *fraîchit,* l'inclinaison augmente et, le centre de voilure sortant du plan vertical qui contient la résultante des réactions de l'eau, il se produit un couple tendant à tourner l'avant du côté du vent. On peut dans certains cas rétablir l'équilibre en reculant momentanément le centre de dérive par un déplacement de poids; par exemple, dans un canot à la voile et trop *ardent,* on fait asseoir l'équipage sur les bancs de l'arrière. Mais à bord d'un grand navire ce procédé ne peut être employé et il faut ramener le centre de voilure dans le plan de la résistance, soit en diminuant l'inclinaison par la suppression des voiles hautes, soit en le portant en avant par la suppression de quelque voile de poupe.

La superficie totale de la voilure est limitée par la stabilité.

On fait en sorte que le rapport du moment de stabilité $P(r - a)$ au moment de voilure $S h$ ne soit pas inférieur à 0,07. Au point de vue de la marche, cette surface doit être comparée à celle du maître couple, à laquelle la résistance de l'eau est considérée comme proportionnelle. Le rapport de ces surfaces variait de 30 pour les vaisseaux à 50 et 60 pour les petits bâtiments.

La surface de voilure et la position de son centre de gravité étant déterminées, il s'agit de savoir quel est l'orientement favorable pour un angle donné de la direction du vent avec celle du bâtiment. La réponse à cette question dépend des lois de la résistance de l'air. Or, celles-ci, fort imparfaitement connues, et déduites d'expériences exécutées sur des plans rigides, sont exprimées en formules mathématiques, qui paraissent assez mal s'appliquer au cas de surfaces convexes et élastiques comme celles des voiles. Ainsi, si on considère la pression normale comme proportionnelle au carré de la vitesse du vent et au carré du sinus de l'angle d'incidence, on obtient des angles d'orientement trop aigus. L'expérience, qui est ici le meilleur guide, conduit, au contraire, à rapprocher le plus possible la direction des vergues de la perpendiculaire à la quille, sans que, cependant, les voiles cessent de bien porter. Il en résulte qu'à l'exception des routes voisines du vent arrière auxquelles correspond un orientement perpendiculaire, les vergues font un angle sensiblement constant, de 20° environ, avec la direction du vent qui les frappe. Cette direction indiquée par les girouettes est la résultante de la vitesse du vent et de celle du navire; elle fait donc, toutes choses égales d'ailleurs, un angle d'autant plus aigu avec la quille que la marche est plus rapide. Il est clair que la connaissance de cet angle jointe à celle de la vitesse du navire permet de construire le parallélogramme de vitesse et, par suite, de mesurer la vitesse du vent réel si sa direction est donnée. On peut obtenir cette direction en observant le sens des crêtes de lame, ou mieux encore celui des traînées d'écume qui se produisent à la surface de l'eau dès que la brise est un peu fraîche; elle peut aussi être signalée par un navire *en panne* dans le voisinage. Supposons, par exemple, que la route fasse avec le vent réel et le vent apparent des angles respectivement égaux

à 115° et 88°, comptés à partir de l'avant; la vitesse du navire sera la moitié de celle du vent réel, et les vergues feront avec la quille un angle de 88° — 20° = 68°, puisqu'il faut un angle d'incidence de 20°. Si la voilure est augmentée, ou bien si on imagine que la résistance directe de l'eau soit diminuée par une transformation idéale de la carène, la marche deviendra plus rapide, la direction du vent plus aiguë, et il faudra donner aux voiles un orientement plus oblique pour leur conserver l'angle d'incidence convenable. Leur composante latérale devenant ainsi plus forte, la dérive tend à augmenter; mais on peut supposer qu'elle soit combattue par une quille mince et profonde, par laquelle la résistance latérale de l'eau sera considérablement accrue sans effet sensible sur la résistance directe. Dans ces circonstances, des augmentations successives de la voilure produiront encore des accroissements de vitesse et amèneront des orientements de plus en plus obliques, jusqu'à ce que l'angle des vergues avec la quille ait atteint une certaine limite, au delà de laquelle la dérive ne pourra manquer de devenir fort appréciable. Cet angle, qui dépend évidemment des valeurs relatives des résistances directe et latérale, ne peut être atteint à bord des bâtiments à voiles carrées; car la disposition du grément n'y permet pas un orientement plus oblique que 30° ou 35°. Supposons donc que notre augmentation de voiles nous ait conduits à l'orientement de 35°, l'angle d'incidence étant toujours de 20° et celui du vent réel de 115°. Le vent apparent fera avec la quille un angle de 35° + 20° = 55°, et, par conséquent, la diagonale du parallélogramme des vitesses tombe en avant de la bissectrice de l'angle du vent réel et de la quille. Il s'ensuit évidemment que, dans ce cas théorique, la vitesse du navire est supérieure à celle du vent réel.

Les considérations précédentes, sans présenter la rigueur des équations qu'on pourrait établir à ce sujet, permettent cependant d'expliquer le fait remarquable cité par les vieux manœuvriers, et indiquent un moyen simple d'en vérifier l'exactitude sur bien des bâtiments modernes de qualité assez ordinaire. Ainsi M. le lieutenant de vaisseau Armand Pâris a observé à bord du vaisseau le *Jean Bart*, de marche moyenne, des vitesses fréquem-

ment voisines de celles du vent et quelquefois supérieures. Cet officier, dont les brillants services ont été brusquement interrompus par un accident mortel, mesurait, à l'aide d'un anémomètre de Robinson, la vitesse du vent apparent dont la direction lui était indiquée par les girouettes; connaissant en outre la vitesse du vaisseau, il pouvait calculer celle du vent réel. A bord d'un excellent voilier, la frégate la *Sybille*, j'ai pu constater maintes fois des vitesses supérieures à celle du vent. Mais ce fait ne peut se produire que dans des circonstances particulières. Tout d'abord, si l'orientement extrême est de 35°, et s'il faut un angle d'incidence de 20° pour que les voiles portent bien, le cas des vitesses égales ne pourra se produire que lorsque l'angle du vent avec la route sera de $(35° + 20°) \times 2 = 110°$, au moins. Mais à mesure que cet angle augmente la vitesse du vent apparent tend à diminuer, et la marche se ralentit malgré l'effet favorable d'un orientement moins oblique. Vent arrière, la proportion des vitesses est réduite à 0,5. Il faut ensuite que la mer soit unie et la brise modérée. Dès que celle-ci fraîchit, la composante horizontale de la voile diminue par l'effet d'une inclinaison plus forte et aussi par la courbure plus prononcée des voiles. Enfin, rien n'empêche d'admettre que la pression normale qu'elles supportent augmente moins vite avec la vitesse du vent que la résistance de l'eau avec la vitesse du navire.

L'étude de la résistance des carènes a donné lieu depuis plus d'un siècle à bien des recherches théoriques et expérimentales, et cependant cette importante question reste encore dans le domaine de la controverse. Chaque ingénieur ou constructeur agit à ce sujet d'après des vues personnelles traduites par quelques-uns en formules mathématiques. Celles-ci, tout en présentant des divergences notables, permettent cependant de considérer, pour une première approximation, la résistance de l'eau comme proportionnelle à la surface immergée du *maître couple* et au carré de la vitesse, c'est-à-dire comme égale à $\bar{K}B^2V^2$. Dans cette formule B^2 représente la surface immergée de la plus grande section latitudinale, V la vitesse et $\bar{K}$ la valeur moyenne d'un coefficient variable K. Ce coefficient a été soigneusement étudié par l'amiral Bourgois dans une série d'expériences exé-

cutées sur des bâtiments de divers types. Ce savant marin, guidé par certaines considérations théoriques, a exprimé la résistance totale Rt par la formule

$$Rt = K_1 B^2 V^2 + K_2 l V^4 + K_3 SV + K_4 SB^2 V^2,$$

dans laquelle B^2 et V conservent la signification précédente, l représente la plus grande largeur, S la surface de la carène et K_1, K_2, K_3, K_4 des coefficients constants pour un même navire.

Le premier terme représente la résistance directe; le coefficient K_1 diminue à mesure que les extrémités deviennent plus fines. Le second terme représente l'effet de la *dénivellation*, c'est-à-dire de l'intumescence que l'on observe toujours à l'avant, et de la dépression qui se produit quelquefois à l'arrière d'un navire en marche. Si la proue était terminée par un plan vertical latitudinal, la hauteur de l'onde antérieure serait $\frac{V^2}{2g}$, g étant l'accélération des graves; son effet pourrait être assimilé à celui d'une augmentation de la surface du maitre couple égale à $\frac{V^2}{2g} \times l$, et si la vitesse du liquide était encore égale à V dans toute la partie soulevée, la résistance qui en proviendrait serait $\frac{V^2}{2g} \times l \times V^2$. Comme la proue est plus ou moins aiguë, il faut multiplier cette valeur par un coefficient dépendant de l'acuité des formes, mais point de la grandeur absolue du bâtiment. Si donc deux navires de dimensions différentes, de formes absolument semblables, sont animés de la même vitesse, ils seront tous deux accompagnés par une onde antérieure de même hauteur, dont l'effet sera évidemment plus sensible sur le plus petit. La grandeur absolue est donc favorable aux grandes vitesses, qui ne pourront être imprimées aux petits bâtiments que par des machines ou des voilures relativement plus puissantes.

Les deux derniers termes représentent la résistance provenant du frottement de l'eau le long des parois de la carène. En fin de compte, le coefficient $\bar{K}$ s'exprime par

$$K = (K_1 + K_4 S) + K_2 \frac{l}{B^2} V^2 + \frac{K_3 S}{B^2} \frac{1}{V}.$$

Pour les vaisseaux et frégates à vapeur et en bois dont la flotte était composée il y a quelques années, la valeur de

$K_1 + K_4S$ variait entre 2^{kil} et $2^{kil},5$, celle de K_2 entre $0^{kil},14$ et $0^{kil},16$, celle de K_3 était constamment égale à $0^{kil},08$.

Depuis cette époque il s'est formé une autre opinion assez généralement admise aujourd'hui, tendant à attribuer la presque totalité de la résistance au frottement latéral. Elle est basée, je crois, sur la considération suivante. Si on suppose l'eau parfaitement fluide et la carène de formes telles que les filets liquides puissent glisser de l'avant à l'arrière sans former de tourbillons, la résistance due à la pression sera nulle quand le navire aura atteint une certaine vitesse. La résistance que l'on observe ne provient donc, dans cet ordre d'idées, que de la viscosité de l'eau et, par suite, du frottement latéral. Or, d'après certaines expériences, le frottement exercé sur un élément de surface serait proportionnel au produit de la superficie de cet élément par le carré de la vitesse du glissement du liquide au point correspondant à l'élément. Si donc on connaissait la vitesse de l'eau en chaque point de la carène, on pourrait évaluer la résistance d'après ce principe. Mais il n'est possible de connaître cette vitesse que dans des cas tout à fait spéciaux ou hypothétiques. Par exemple, on peut imaginer qu'une surface rigide affectant la forme exacte d'une houle régulière soit appliquée sur celle-ci et l'accompagne dans son mouvement de propagation. Le profil de la houle affecte, comme on sait, la forme d'une trochoïde plus ou moins allongée, suivant que la vitesse de propagation est plus ou moins grande; et le calcul permet d'obtenir la vitesse du liquide en chacun de ses points.

M. le professeur Rankine a ainsi calculé la résistance qu'éprouveraient des bandes trochoïdales animées d'une vitesse horizontale égale à la vitesse de propagation des houles de même forme. Ses résultats expriment assez exactement les résistances observées directement sur les navires anglais *Admiral* et *Lancefield*, dont les lignes d'eau sont sensiblement trochoïdales. Il propose la formule suivante, qui s'appliquerait suffisamment bien dans des cas analogues :

$$R = \frac{kwe^2}{g}\left[1 + 4\,\frac{(u_0 \pm c)^2}{c^2}\right]LG.$$

R représente la résistance du navire;

L, sa longueur totale;

G, la longueur moyenne du contour de la partie immergée des couples;

e, la vitesse du navire;

u_0, la vitesse de l'eau au milieu de la longueur;

w, la densité de l'eau;

g, l'accélération de la pesanteur;

k, un coefficient de frottement égal à 0,036 pour des surfaces peintes et en bon état de propreté.

Cette façon d'évaluer la résistance serait probablement fort inexacte, si l'imperfection des formes donnait lieu à des tourbillons ou entraînements d'eau tels que ceux qui se produisent le long des flancs d'un chaland carré. Il importe évidemment de réduire le plus possible la force vive ainsi communiquée au liquide au dépens du travail utile du propulseur. Dans ce but M. Scott Russel a adopté, pour les lignes d'eau, le profil de l'*onde solitaire* qui accompagne un bateau naviguant dans un canal étroit, c'est une sorte de sinusoïde; mais les considérations théoriques sur lesquelles il s'appuie sont fort contestées. M. Rankine a proposé, dans le même but, une courbe appelée par lui Néoïde dont la théorie se trouve dans les *Philosophical Transactions* R.S.L., 1863-1864. Le travail du savant professeur est le meilleur, que je sache, sur cet intéressant sujet; il fait l'objet d'une note spéciale à la fin de cet article.

Un défaut dans les formes pourrait, du reste, entraîner une compensation. Ainsi, d'après l'habile constructeur M. Normand, du Havre, l'effet nuisible d'un gros avant adapté à un navire à hélice pourrait être compensé par un meilleur rendement du propulseur qui tournerait ainsi dans une eau plus stagnante. Cette considération conduirait à classer séparément les valeurs des résistances déduites des deux modes principaux d'expérimentation : les expériences sur l'utilisation du travail fourni par les machines, et la mesure directe de la traction exercée par la remorque. Ces expériences toujours coûteuses conduisent trop souvent à la découverte d'un défaut auquel il n'est plus possible

de porter remède. On a donc songé à opérer sur les modèles réduits des bâtiments avant de mettre ceux-ci sur les chantiers. D'après M. Fronde, la résistance du grand navire pourrait être déduite de celle de son modèle par la loi suivante : si d est le rapport des dimensions linéaires du modèle à celles du navire et si on imprime au modèle des vitesses V_1, V_2, V_3... auxquelles correspondent les résistances observées R_1, R_2, R_3..., les résistances du grand navire seront d^3R_1, d^3R_2, d^3R_3... pour les vitesses $V_1\sqrt{d}$, $V_2\sqrt{d}$, $V_3\sqrt{d}$... Les ondulations produites à la surface de l'eau par le grand navire et la réduction sont en même temps fort semblables.

Indépendamment de son effet utile au point de vue de la vitesse, l'acuité de la poupe permet aux filets liquides d'arriver plus directement sur le gouvernail et favorise son action. La pression normale qui s'exerce sur celui-ci agit à l'extrémité d'un bras de levier égal à la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de dérive sur la droite normale à la surface du gouvernail et passant par son centre de gravité. Son moment est nul quand le gouvernail est droit, et presque nul s'il fait avec la quille un angle de 90°. Entre ces deux positions extrêmes il y a donc un maximum. En supposant la pression normale proportionnelle au carré de la vitesse et au sinus carré de l'angle d'incidence et les filets liquides parallèles à l'axe longitudinal, l'angle favorable serait de 53°; mais la convergence des filets doit en diminuer la valeur. Dans la pratique on adopte l'angle maximum de 35° environ.

Quand un navire en marche évolue par la seule action de son gouvernail fixé dans une position invariable, il décrit une circonférence d'un mouvement uniforme. Plus exactement, les différents points du navire décrivent des cercles concentriques auxquels l'axe longitudinal n'est pas tangent. Cet axe fait un angle de 10° à 20° avec la tangente au cercle décrit par le milieu de la longueur. L'uniformité du mouvement n'est atteinte qu'après une *abattée* de 90° environ.

A l'action évolutive du gouvernail peut s'ajouter celle des voiles. Celle-ci, toujours faible en comparaison de la première

dès que la vitesse atteint une certaine valeur, est surtout utilisée lorsqu'il s'agit de manœuvrer le navire à partir du repos. Pour produire ou accélérer sa rotation dans le sens voulu, on maintient les voiles d'un même mât *masquées*, *pleines* ou *en ralingue* (orientées dans la direction du vent) suivant qu'elles sont placées en avant ou en arrière du centre de dérive, sans perdre de vue que ce point est situé en avant ou en arrière du centre de surface du plan longitudinal suivant que le navire avance ou recule. Mais ici doit s'arrêter la théorie, car le coup d'œil et l'expérience seront toujours les meilleurs guides du marin.

NOTE SUR LES LIGNES D'EAU

PROPOSÉES PAR M. LE PROFESSEUR RANKINE.

Ce savant admet que, lorsque les formes du navire sont fines et le tirant d'eau suffisamment grand, les mouvements verticaux du liquide peuvent être négligés et que, par suite, les trajectoires des molécules sont contenues dans un plan horizontal. Les équations de continuité et de mouvement (celui-ci étant supposé permanent) se réduisent alors à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$u' = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad v' = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

L'origine des axes accompagne le navire animé de la vitesse uniforme c suivant les x; u et v sont les vitesses, u' et v' les accélérations suivant les x et les y; P est la pression et la densité est égale à 1.

L'équation (1) prouve que u et $-v$ sont les dérivées partielles d'une fonction U de x, y, et par suite

$$u = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

En vertu de la permanence, on a

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v = 0$$

Donc U est indépendant du temps, et l'équation

$$U = B,$$

dans laquelle B est une constante arbitraire, donnera la série des lignes d'écoulement dont fait partie la section horizontale du navire à la profondeur considérée. Il s'agit de déterminer la forme de la fonction U.

On a par (3)

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial x} \\ v' &= \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et par (2)

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}.$$

Il vient après réduction

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]}{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}}.$$

Donc $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ est une fonction de U.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(U) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

La fonction $F(U)$ est indépendante du temps et conserve, par suite, la même valeur tout le long du parcours d'une même molécule. Or, à une distance infinie en avant du navire la vitesse du liquide est uniforme et les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ sont nulles. Donc $F(U)$ est nul, et la fonction U doit satisfaire à la condition

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

La trajectoire des molécules devant être rectiligne pour $x=\infty$, les courbes fournies par les solutions de l'équation (6) ne pourront convenir que si elles possèdent une asymptote parallèle aux x, et il faut de plus que l'axe des x lui-même fasse partie de la série des lignes d'écoulement. On est ainsi conduit à poser

$$U=cy\left[1+f(x,y)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

la fonction f devant s'annuler pour x ou $y=\infty$ et $yf(x,y)$ satisfaire à (6). L'équation de l'asymptote est alors

$$y=\frac{U}{c}=b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

b représentant la distance de cette asymptote à l'axe des x.

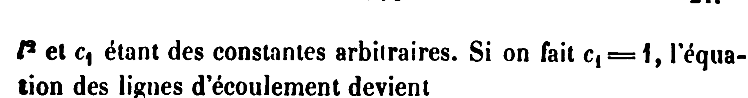
Si b est nul, on a les deux solutions $y=0$, qui représente l'axe des x, et $1+f(x, y)=0$. Cette dernière équation est celle de la ligne d'eau du bâtiment.

La présence de l'asymptote exclut les solutions trigonométriques de (6), mais elle est compatible avec une forme de U, ou de $yf(x,y)$, analogue à celle du potentiel. Si on pose

$$yf(x, y)=\varphi(x^2+y^2),$$

on trouve facilement

$$\varphi=-\frac{l^2}{x^2+y^2}+c_1,$$



l^2 et c_1 étant des constantes arbitraires. Si on fait $c_1 = 1$, l'équation des lignes d'écoulement devient

$$b = y\left(1 - \frac{l^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

La ligne d'eau du navire est alors un cercle de rayon l et l'équation (9) représente la série des *néoïdes cyclogènes.*

De la forme circulaire on peut faire dériver d'autres solutions. Par exemple, en posant

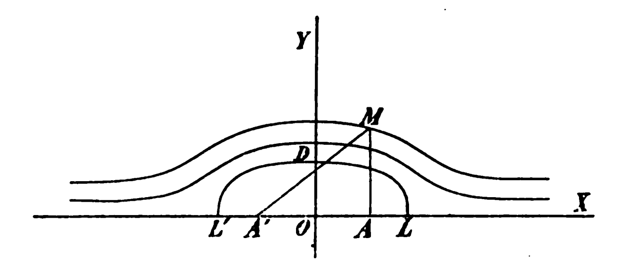
$$y f(x,y) = \int_{-a}^{+a} \frac{y\,d\alpha}{(x-\alpha)^2 + y^2} = \text{arc tg}\,\frac{a+x}{y} + \text{arc tg}\,\frac{a-x}{y} \quad (10)$$

la condition (6) sera encore satisfaite, et, si on désigne par λ une longueur arbitraire, l'équation

$$b = y - \lambda\left[\text{arc tg}\,\frac{a+x}{y} + \text{arc tg}\,\frac{a-x}{y}\right] \quad \ldots \quad (11)$$

pourra convenir aux lignes d'écoulement.

Portons sur l'axe des x, à droite et à gauche de l'origine O et à partir de ce point des longueurs OA et OA′ égales à a.



L'équation (11) exprime que l'excès de l'ordonnée d'un point M sur une valeur minimum b est proportionnel à l'angle $AMA' = \theta$ formé par les vecteurs AM, A′M partant des *foyers* A et A′. Ces courbes sont symétriques par rapport à l'axe des y et ont pour asymptote, dans les deux sens, la droite $y = b$.

Si on fait $b=0$ on obtient, indépendamment de la droite $y=0$, un ovale LDL′, ou

$$y=\lambda.\theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

plus aplati qu'une ellipse dans la partie médiane et plus arrondi aux extrémités. C'est la section du corps flottant qui engendre les *néoïdes oogènes* (11). Chacune de ces courbes pourrait convenir au contour du corps flottant, et M. Rankine propose de les affecter aux lignes d'eau des navires. Il est vrai qu'elles ne sont pas fermées, mais l'auteur estime qu'en les limitant en un point voisin des extrémités L et L′, puis en les fermant par une tangente menée par ce point et prolongée jusqu'à l'axe des x, le régime de l'écoulement ne serait pas sensiblement modifié.

On peut donner à ces courbes des formes très variées par la modification des constantes arbitraires a et λ, mais il convient d'adopter celles sur lesquelles la vitesse de glissement $\sqrt{u^2+v^2}$ est le moins variable. Les plus avantageuses sont engendrées par l'ovale dans lequel le rapport du grand axe au petit est égal ou supérieur à $\sqrt{3}$. Ce sont les *lissonéoïdes*.

L'auteur indique ensuite une ingénieuse construction graphique des néoïdes et différents procédés d'abréviation pour les calculs relatifs à un navire construit d'après ce principe. Les lignes d'eau ainsi obtenues peuvent satisfaire, par la variété de leurs formes, à toutes les exigences de la construction, et elles présentent beaucoup d'analogie avec les sections des navires les mieux réussis. On peut donc adopter sans aucun risque la méthode du savant professeur, s'il s'agit d'un grand bâtiment. Mais la simplification qui supprime les mouvements verticaux du liquide, acceptable dans ce cas, ne l'est plus si le navire est petit. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer une chaloupe à vapeur lancée à grande vitesse. Elle est accompagnée d'une série d'ondulations fort accentuées s'étendant à perte de vue sur son arrière et ses côtés, et la première onde voisine de la proue soulève cette partie de l'embarcation si celle-ci est trop courte pour que son arrière soit soutenu par l'onde suivante. Cet effet ne saurait être négligé lorsqu'il est essentiel, comme dans le cas des *torpilleurs*, de tenir

compte des moindres circonstances qui peuvent influencer la vitesse.

Indépendamment de cette imperfection, la théorie de M. Rankine donne lieu, à mon avis, à une autre objection. Les équations fondamentales (1), (3), (5), (6) sont basées sur l'hypothèse d'une continuité non interrompue du liquide depuis la région antérieure infiniment éloignée jusqu'aux flancs du navire et au delà. Or, on observe que les crêtes des ondulations voisines de la proue déferlent, ce qui indique manifestement une discontinuité; et celle-ci ne peut manquer de s'étendre à une certaine profondeur. Voyons donc si cette discontinuité n'est pas indiquée par les équations générales dans le cas qui nous occupe et qui est caractérisé par les conditions suivantes:

1° Le mouvement est permanent, c'est-à-dire qu'en un point x, y, z du liquide dont les coordonnées sont rapportées à des axes qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes avec la vitesse uniforme c parallèle aux x la vitesse, la pression et, en général, toutes les circonstances du mouvement ne dépendent que des coordonnées et nullement de l'époque considérée. Autrement dit, ce sont des fonctions qui ne contiennent pas le temps explicitement;

2° La vitesse du liquide, relativement aux axes mobiles, est rectiligne et uniforme dans les régions infiniment éloignées du côté des x positifs (sur l'avant du navire) et aussi dans les régions infiniment profondes.

L'axe des z est dirigé vers le bas; le plan x, y coïncide avec le niveau du liquide non troublé; la pression est représentée par P et l'accélération de la pesanteur par g. Si u, v, w et u', v', w' représentent les vitesses et accélérations parallèles aux axes, on a les équations connues :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$u' = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad v' = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad w' = g - \frac{\partial P}{\partial z} \quad . \quad . \quad (14)$$

Additionnant les équations (14) respectivement multipliées par par u, v, w, il vient :

$$uu' + vv' + ww' - gw + \frac{\partial P}{\partial x} u + \frac{\partial P}{\partial y} v + \frac{\partial P}{\partial z} w = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de la permanence,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - gz + P\right] = 0.$$

Donc

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - gz + P = F(x, y, z), \quad . \quad . \quad (15)$$

la fonction $F(x, y, z)$ étant indépendante du temps. Or, dans les régions antérieures infiniment éloignées, on a $\frac{u^2+v^2+w^2}{2} = \frac{V^2}{2} = \frac{c^2}{2}$ et $P - gz = A$, A représentant la pression atmosphérique Donc la fonction F, qui, étant indépendante du temps, doit conserver la même valeur sur toute la trajectoire d'une molécule, se réduit à la constante $\frac{c^2}{2} + A$.

Les équations (14), (15) et la permanence du mouvement donnent :

$$\left.\begin{aligned}
u' &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - gz\right)\\
v' &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - gz\right)\\
w' &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{\partial P}{\partial z} = g + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - gz\right)
\end{aligned}\right\}(16)$$

d'où l'on tire, en développant les dérivées partielles de $\frac{u^2+v^2+w^2}{2}$, les relations

$$\left.\begin{aligned}
v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) &= 0,\\
u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) &= 0,\\
u\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ou bien

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}}{w}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}}{v}=\frac{\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}}{u}=\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

α désignant une fonction de x, y, z.

En différentiant les équations (18) respectivement par rapport à z, y, x, il vient

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}&=\alpha\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial \alpha}{\partial z},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}&=\alpha\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial \alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}&=\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \alpha}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Additionnant et tenant compte de (13), on obtient

$$0=u\frac{\partial \alpha}{\partial x}+v\frac{\partial \alpha}{\partial y}+w\frac{\partial \alpha}{\partial z}=\frac{d\alpha}{dt};$$

ce qui prouve que α est indépendant du temps et, par suite, nul, puisque les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, etc., sont nulles pour $x=\infty$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Si on pose $u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, φ désignant une fonction de x, y, z, les deux premières équations (20) donnent

$$v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+f(y,z), \qquad w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\psi(y,z);$$

et ces résultats portés dans la troisième indiquent la relation

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ceci prouve que f et ψ sont les dérivées partielles d'une fonction λ de y et z

$$\psi = \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad f = \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Par conséquent

$$u = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi + \lambda), \quad v = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + \lambda), \quad w = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \lambda)$$

ou simplement

$$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

la fonction U devant, par (13), satisfaire à la condition

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Les équations (21) montrent que les trajectoires des molécules sont normales aux surfaces U = constante, lesquelles tendent à se confondre avec un plan vertical perpendiculaire aux x dans les régions éloignées.

On a aussi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w = u^2 + v^2 + w^2 = V^2 \quad . \quad (23)$$

Figurons maintenant l'horizontale B_0B parallèle aux x, parcourue avec la vitesse uniforme $-c$ par une des molécules des régions profondes, et les surfaces φ_0, φ_1, φ_2 le long desquelles la fonction U est constante.

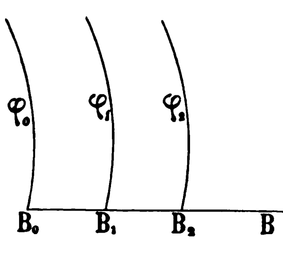


Fig. 3.

Les points B_0, B_1, B_2 où elles coupent la droite peuvent être considérés comme les positions de la molécule aux époques t_0, t_1, t_2. Les valeurs de U seront donc sur ces surfaces

$$U_0, \quad U_0 + c^2(t_1 - t_0), \quad U_0 + c^2(t_2 - t_0)...$$

(U_0 représentant la valeur de U sur la surface φ_0) et, par suite, en vertu de (23), la vitesse V du liquide sera partout constante et égale à c. Il en résulte, par (16), que les accélérations u', v', w' étant nulles, le mouvement ne peut être que rectiligne et uniforme en chaque point du liquide.

Le passage d'un bâtiment ne peut donc manquer de produire un mouvement discontinu, au moins dans une région plus ou moins étendue voisine de la proue. Mais il est possible que la discontinuité ne s'étende pas au delà de cette région, si on suppose au navire certaines formes convenablement appropriées à sa vitesse et qu'il s'agit justement de déterminer. Dans ce cas, le mouvement du liquide pourrait rester continu, mais en même temps oscillatoire, depuis la même région jusqu'à une distance infinie vers l'arrière.

Les équations (13), (14) et (15) doivent toujours subsister, mais la fonction F, encore indépendante du temps, ne se réduit plus à une constante. Les relations (21) et (22) n'ont plus lieu, mais on peut admettre, il me semble, que la pression soit constante sur tout le parcours d'une molécule, c'est-à-dire que la relation

$$\frac{\partial P}{\partial x} u + \frac{\partial P}{\partial y} v + \frac{\partial P}{\partial z} w = 0,$$

ou,

$$uu' + vv' + ww' - gw = 0,$$

évidemment satisfaite sur la surface libre, le soit encore en chaque point du liquide. Je suis malheureusement incapable de poursuivre plus loin cette intéressante question.

LES AFFINITÉS LINGUISTIQUES

DES LANGUES

SÉMITIQUES ET POLYNÉSIENNES

PAR

J. VAN DEN GHEYN, S. J.

NOTE PRÉSENTÉE A LA 3e SECTION LE 29 OCTOBRE 1884.

On a tenté dans ces derniers temps d'établir un rapprochement entre les idiomes sémitiques et les nombreux dialectes polynésiens.

Il y a deux ans, le Rév. Dr Mac Donald présentait un essai de ce genre à la Société royale de Victoria (1). Plus récemment, M. S.-M. Curl prouvait historiquement les rapports de la Phénicie et de la Polynésie et s'efforçait ainsi de donner un appui solide à la théorie de l'identité linguistique (2).

Il n'est pas encore possible de se prononcer en toute sûreté sur ces intéressants travaux, qui ne sont pas arrivés à leur point de complète maturité et dont les résultats demeurent contestables. Nous indiquerons tout à l'heure les principales objections qui peuvent être soulevées. Cependant nous n'avons pas voulu attendre les dernières et certaines conclusions pour signaler ces nouvelles études aux membres de la Société scientifique.

Nous le pouvons d'autant plus aisément qu'un des partisans les plus convaincus de la théorie sémitico-polynésienne a bien voulu nous communiquer le fruit de ses recherches. Le R. P.

---

(1) *Transactions of the royal Society of Victoria*, mai 1883. Voir dans NATURE, n° du 20 décembre 1883, p. 172, une appréciation assez peu favorable de ce travail par M. Keane.

(2) *Anthropological Institute of London*, séance du 24 novembre 1884.

Étienne, missionnaire dominicain à l'île de la Trinité, préposé depuis plusieurs années au *Leper Asylum* de Cocorite [1], a été amené, en recherchant l'histoire de la lèpre, dont il soulage les victimes avec tant de zèle, à cette étrange découverte que le nom polynésien de la lèpre est identique au terme usité en copte.

Mais laissons la parole à l'auteur lui-même. Nous publions d'abord son travail sans y rien changer : quelques observations critiques, que le R. P. Étienne a bien voulu nous permettre de formuler ici, suivront le mémoire.

Pendant que nous tâchions de construire l'histoire d'un affreux mal que nous touchons de près et qui, répandu quatre fois plus qu'au moyen âge, ravage la moitié du globe, la lèpre, des faits entièrement inattendus attirèrent notre attention sur le passé de la maladie. Les renseignements étaient à peu près nuls : cette histoire est à faire. Heureusement les langues, malgré leur prodigieuse fluidité, restaient comme des monuments d'une solidité incomparable. Cherchant donc quelle avait pu être l'origine de la lèpre en Polynésie, parmi les dialectes de ses nombreux archipels nous recueillîmes comme nom principal un mot qui, à Samoa, dite par les Océaniens « l'île-mère de toutes les autres », prenait la forme de *soupa*. Or, un peu auparavant, le vieil empire des Pharaons nous avait livré, lui-aussi, son nom le plus antique et ce nom était *sôbah*. Entre *soupa* et *sòbah* la ressemblance était grande; mais n'était-elle que fortuite?

Afin de s'en assurer on pouvait remonter de chaque côté à l'étymologie. Chez les Polynésiens *soupa* exprimait une paralysie, car la lèpre a deux formes, dont l'une rend, en effet, les pauvres malades semblables à des paralytiques. En outre, les expressions diverses qui forment la famille de ce vocable tournaient également autour de la même idée. D'autre part, le terme égyptien de *sôbah*, avec le groupe qui l'accompagne, gardait précisément

---

[1] La *Revue des questions scientifiques*, t. VI, p. 284, contient un compte rendu, présenté par le Dr Moeller, d'un intéressant travail du R. P. Étienne sur le caractère contagieux de la lèpre.

le même sens de paralysie. Il y avait plus : ce n'était pas seulement avec l'égyptien qu'existait la conformité, mais avec les autres langues sémitiques, l'hébreu, l'arabe, le ghez ou éthiopien. Un court tableau mettra le lecteur à même de juger de l'unité sur un simple coup d'œil :

Éth. : *zab*, *zabab*, ou *tsab*, *tsabab*, angustum esse vel fieri, coangustare.
zabas, *zawas*, debilem esse vel fieri; curvum, contortum et inutile membrum habere.
zebuse, *zewuse*, mutilus, mancus, debilitatus membris.
zabase, debilitas, infirmitas.
Ar. : *ẓabb*, *ẓabab*, *ẓabaṭ*, saisir, tenir, serrer, adhérer fortement.
ẓaban, serrer, paralyser; paralysé.
meẓabun, paralysé, paralytique.
Ég. : *sôbh* (1), serrer, être lépreux.
sôbah, lèpre.
Polyn. (samoan) : *supa*, presser, plier; crochu.
supa, être paralysé, lépreux; paralysie, lèpre.

Le doute était impossible : avec ces quatre langues on navigue dans les mêmes eaux.

La confrontation méritait d'être poursuivie. Et à mesure que nous avancions le nombre des termes polynésiens et sémitiques réellement conformes entre eux se multipliait au point que *la langue polynésienne était une langue sémito-koushite.*

Comment cela se faisait-il? Pourquoi cette parenté? Nous l'indiquerons plus loin; mais, pour arriver à la solution, commençons par la comparaison des langues qui, à elles seules, suffiraient à remettre en leur lieu et place les Malayo-Polynésiens.

Nous parlons ici de Malais en même temps que de Polynésiens (2) : l'origine première est une et ressortira pleinement de nos études. Mais, tout désireux que l'on soit de s'assurer si les Malais sont des Koushites, ce n'est certainement pas aux Malais d'aujourd'hui qu'il faut regarder. Aucune population n'a été plus profondément imbibée d'éléments hétérogènes que celle de la

(1) Dans un autre travail nous avons restitué ce *sôbh*, coercere, que l'on devine facilement, mais qui fait défaut dans nos vocabulaires coptes.

(2) Deux races anciennes se partagent les îles du Grand Océan, celle des *Mélanésiens* ou nègres océaniens, et celle des *Polynésiens*. Nous ne considérons ici que ces derniers, qui forment la grande majorité de la population des archipels.

Malaisie proprement dite. Ce sont, avec les vrais et anciens Malais, des noirs mélanésiens, des Dravidiens, des Hindous, des Thibétains, des Chinois, des Arabes, des Espagnols, des Portugais, des Hollandais : chacun d'eux s'est installé avec tous ses bagages et maintenant la langue malaise est le plus parfait enchevêtrement qu'on puisse imaginer. L'hindoustani et l'arabe y dominent et précisément les Malais ne sont ni Indo-Européens, ni Arabes. Un grand nombre de termes du malais primitif ont si complètement disparu qu'on ne les trouve pas même à l'état de souvenir dans les lexiques et que beaucoup de ceux qui subsistent encore sont défigurés. Aujourd'hui on ne parle guère plus le malais primitif dans les grandes îles de la Malaisie qu'on ne parle celtique à Paris ou à Londres. Inaperçu, ce fait donne lieu aux plus grandes erreurs sur l'origine première de la population.

Cependant hâtons-nous de dire que le linguiste peut encore extraire de l'idiome un corps notable de vieux fond koushite destiné à rendre les plus grands services.

Le malais pur, c'est dans la Polynésie qu'il faut le prendre. L'idiome polynésien montre que la race s'est réfugiée sur l'Océan avant qu'aucun élément étranger fût venu altérer sa nature. Chez elle pas d'Hindous, pas de Tamouls, pas de Chinois, pas de Thibétains, pas d'Arabes, pas d'Espagnols, etc., mais des Malais ou plus exactement des Koushites de vieille roche, ne parlant que la langue de leurs premiers pères et ne connaissant rien autre que leurs traditions. Partis Koushites, Koushites ils sont restés. Les profonds abîmes des mers leur faisaient des barrières infranchissables comme en créent les cimes ardues où d'autres populations cherchent un abri.

Adressons-nous donc à la langue polynésienne. Deux éléments sont à considérer, le vocabulaire et la grammaire.

§ I. — Vocabulaire.

C'est avec l'égyptien que nous comparerons principalement les langues polynésiennes, parce que l'égyptien nous paraît

offrir une ressemblance spéciale et que c'est de lui qu'on en attendrait le moins. Nous cueillerons cependant çà et là quelques termes des autres idiomes sémito-koushites, et cela pour plusieurs motifs : 1° pour que la parenté ressorte avec toute la famille; 2° parce qu'une expression absente d'une langue peut se retrouver dans une autre congénère; 3° parce que le lexique copte de Peyron dont nous faisons usage, malgré son incontestable mérite, offre encore les plus grandes lacunes.

Comme tout l'état d'un peuple est révélé par sa langue, on voudra bien, en raison de l'importance du sujet, nous pardonner la longueur de la liste. Nous l'avons, du reste, fort raccourcie, car le dictionnaire en entier y eût passé. Dans ce qui a été choisi, un esprit attentif pourra discerner déjà les germes que nous développerons ensuite, c'est-à-dire la substance de la civilisation chamite ou koushite.

On remarquera que nous ne prenons pas ces langues et ces peuples au moment de leur bifurcation, mais quand six mille ans de durée et six mille lieues d'espace se sont étendus entre eux. Que malgré ces six mille ans et ces six mille lieues la similitude soit encore si complète, le phénomène est certes des plus saisissants. Et la similitude eût été bien autrement grande si, au lieu d'instituer la comparaison avec le copte, nous avions pu le faire avec l'antique idiome des Pharaons.

Plusieurs observations serviront à éclaircir les rapprochements que nous allons faire :

1° L'égyptien aime à accumuler les voyelles : on y voit surabonder les termes comme *aouô*, gage; *eoou*, gloire; *euhaeoou*, gloriosi; *ouoeie*, agriculteur, etc. Le polynésien — et ce n'est pas là un faible trait de sa conformité — non seulement a le même goût, mais il semble viser à renchérir encore. A mesure que l'on s'éloigne du continent asiatique et que l'on s'enfonce vers l'orient, les consonnes tombent une à une. Le javanais en a 20, les langues de Sumatra, 18; celles des Philippines, de Formose, le tagal, le bisaya, 16; de Fiji, Tonga, etc., 15; de Samoa, Tahiti, 10; de la Nouvelle-Zélande, 9; des Marquises, 8; d'Hawaii, 7; des îles australes, 6. Les insulaires négligent même

souvent d'employer les consonnes qu'ils ont gardées. Aussi nos lecteurs ne demanderont pas aux correspondants polynésiens des consonnes qui n'existent même pas dans le dialecte, le *b* et le *d*, par exemple. Elles sont, ou tout simplement supprimées, ou remplacées par d'autres dont on ne saisit pas toujours l'analogie. Heureusement les altérations sont quelquefois faciles à reconnaître, grâce à la série des transformations; comme dans *vaha*, *fafa*, *haha*, *aha*, bouche;

2° Chez les Samoans, une consonne forte, comme le digamma chez les Grecs, est souvent remplacée par une aspiration;

3° Les termes du tableau sans indication d'idiome appartiennent tous, dans la colonne de gauche, à l'égyptien;

4° Quoique dans cette langue le dialecte thébain passe pour le plus ancien et le plus pur, c'est avec le memphitique que la ressemblance est la plus grande;

5° Les réduplications sont fréquentes, soit en égyptien, soit en polynésien; le lecteur les reconnaîtra;

6° Quelques termes polynésiens qui ne se trouvent pas dans le vocabulaire à l'état isolé apparaissent dans les composés;

7° Les dialectes polynésiens sont indiqués à la droite du mot par une minuscule, qui est l'initiale du nom du dialecte :

Le samoan est marqué		s;
le tahitien	—	t;
le foutounien	—	f;
le marquésan	—	m;
le hawaiien	—	h;
le néo-zélandais	—	z;
le malais	—	ml;
le malgache	—	mg.

Ainsi *supa* s signifie *supa* du dialecte samoan. Lorsque plusieurs minuscules se suivent, c'est que le mot appartient à plusieurs dialectes. Ainsi *mimi* tmhsf est des dialectes tahitien, marquésan, hawaiien, etc. Mais nous ne nous sommes nullement attaché à la désignation de tous les dialectes; cela ne rentrait pas dans notre but.

CORRÉLATION ENTRE LES VOCABULAIRES.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	a, faire	*haa* m.
	a, marque du passé.	*a* m, marque du participe passé.
	a, marque de l'impératif . . .	*a* m, marque de l'impératif.
HÉB.	*âdon*, maître; *adonai*, le seign^r.	*atua* m, Dieu. (Nous avons établi ailleurs la correspondance.)
	agô, *akô*, destruction	*nahu* mh, détruire, déchirer, mordre.
	ajô, vipère; *ahori*, *akôri* serpent (V. *najas-hajeh*) . . .	*niga* s, *nahelo*, *naheka* h, serpent.
	aha, *ahe*, *ahè*, certè, utique . .	*ehoi* m, *aoheia* m.
	ahe, vivre, vie.	*eha* h.
	aho, dépôt, trésor	*ahu* h.
	ai, être	*ai* mh.
	aiai, croître	*aui* h.
	ai, jamais	*aoe* m.
	ail, *oili*, bélier	c'est l'origine du titre des chefs, *alii* s *arii* t.
	akhi, roseau	*aho* h, *aehe* t.
	iam, *iom*, mer	*sami* h.
ASS.	*ana*, pour	*na* mht.
»	*ana*, ciel	*ani* m.
»	*anu*, dieu ichthyomorphe. . .	*hanau* m, dieu des poissons.
»	*ao*, lumière	*ao* ht.
	ape, *aphe*, tête	*afii* t, *aôpo* t, *upoo* t, *upoho* m.
	apot, coupe, vase	*ipu* mt.
	asha, qui, quoi ?	*aha* mh.
ÉTH.	*àshâ*, poisson	*ika* m.
	ashai, *ashè*, multiplier, multitude	*aha* h.
	ata, *ouata*, multitude	*atoa* mst.
HÉB.	*aatsâ*, firmavit; arabe: *aasâ*, dur.	*eta* t, fort, dur.
AR.	*bâad*, séparer.	*vahi* mh.
	bal, délier, délivrer	*pale* h.
	bebe, *bebou*, etc., bouillir, etc. .	*puapua*, *puputhi* mh.
ACCAD.	*bil*, feu; *bilbilla*, brûlant . . .	*vela* h, brûler, chaleur; *veli* h, étincell
HÉB.	*bohu*, vide, chaos.	*po* mh.
	bash, peau.	*paù* s.
	bash, écorcher	*pahee* m.
	bô, arbre	*vao* s, *pohon* mal.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	bôlan (*ouôtan*) [1] percer, trou .	*puta* m.
	brèj, éclair (assy., *barqu*). . .	*vira* t (*bira*), *uira* t.
HÉB.	*dun*, soumettre	*tuni* m, battre, écraser.
	e, qui, quæ, quod	*i* mh, *ia* s.
	ebu, ivoire.	*ivi* mhs, os.
	èi, *èou* (accad. *ed*), maison . .	*hae* m, *hale* h.
	eial, splendeur, brillant; *eielel*, briller	*alohi* h, splendeur, briller.
	eiat, *iat*, considérer.	*tiohi* m.
	eine, *ini*, amener.	*nahi* m.
	eiôt, *iôt*, père.	*atua*, *motua* m.
ASS.	*elippu*, vaisseau	*iepe* m.
»	*elish*, en haut.	*i luna* h.
	ement (pour *kement*), occident .	*hikimoe* h.
	entoou, illi, illæ	*atou* m, *latou* s.
	entôten, vos	*tou*, *otou* m, *outou* s.
	etouèu, distant	*atu* t, *atea* m.
	fit, élever (héb. et arab. *bâtat*).	*fata* h, *hata* m.
	Gab-batha (J. XIX, 13) . . .	*fataa* h, *hataa* m, lieu élevé.
	fô, *fôi*, *bô*, cheveu	*voho* m.
	ftou, quatre	*papat* (Java), *uppa* (Timor), *effat* mg, *fa* s, *ha* m.
HÉB.	*gârab*, scabit, rasit.	*koli* h, *oro*, *rarau* t.
»	*gârâb*, scabies (égyp. *jerji*) . .	*rarara* t.
	gisi, élever.	*hooea* h.
	gos, *joeis*, le Seigneur, Dieu. .	*eaea* h, en dignité, honorable.
	hebs, couvrir	*ufi* s, *haupoi* t.
	hbô, ce qui couvre, tabernacle .	*api* s, toiture, couvert.
	hah, multitude	*aha* h.
	hai, mari	*ahana* m.
	hal, tromper	*aluno* h, *'ole*, *'oole* s.

Dans le groupe qui suit, les mêmes sens existent dans les deux langues.

HÉB.	*halal*, folie.	*ulala* h.
»	*hâlal*, splenduit	*hulala* s.

[1] Le *ou* égyptien se prononce souvent *b*.

ÉGYPTIEN.		POLYNÉSIEN.
	(arab., *id.*; assy., *ellu*, brillant) .	*oleha* h, éblouir, éblouissant.
HÉB.	*hâlal*, se vanter	*ululu* h.
»	*hâlak*, ivit, incessit	*haele, hele* h.
»	*hâleah*, là	*alaila* h.
	hâpi, taureau, bœuf (ass., *alpu*).	*sâpi* ml, taureau, bœuf, vache.
ÉTH.	*hawi, habi*, feu (ég., *hôbes*, ardere)	*afi, api* ml, *afi* s, *ahi* mt, *afo* ms, *a* mh.
	hbs, hoous, couvrir, cacher . .	*ahu* ht, se couvrir, revêtir.
	hbôs, vêtement	*'ofu* s, se vêtir, vêtem^t; *aahu* h, *hoapu* h.
	hè, face	*ao* mh.
	heke, raser.	*hokae* h.
	heli, terreur, *tiheli*, terrifier . .	*kely* mg, *hery* mg, violence, tyran, tyranniser.
	hello, khello, vieux	*akalala* h.
	hèm, calere	*umu* mh, cuire, four.
	hène, aromate.	*hinu* t, huile, graisse.
	hèt, cœur	*hâti* ml, *fatu* s.
	hi, jeter.	*hehi* h.
	hik, chef (acad., *shak*)	*haku* h, *hakaiki* m.
	hime, sahime, thime, femme. .	*vahine* h, *fafine* s.
	hile, tordre.	*fatu, fetu* t.
	hioui, aiguiser, affiler	*eoo* m.
	hko, avoir faim	*oki* h.
	hke, pauvre	*oki* h, *hoka* h.
	hlol, kloole, ténèbres	*hauli* h, nuages noirs; *uli* s, noir, sombre.
	hmèr, amèr, sein, poitrine . .	*ouma* t, *omaoma* mh.
	hmot, grâce	*meitai* m, bénédiction.
	hne, vouloir, volonté.	*hinaàro* t.
	ho, hle, hra, visage.	*ao, alo* mh, *aro* t.
	hof, serpent (héb., *ephé*, vipère; ὄφις)	*ofi* t.
	hôk, hôkm, ceindre, serrer . .	*hokea* h.
	hôl, partir vite, voler	*lele* h.
	hôm, fouler, presser.	*oomi* m, *uumi* h, *uma* h.
	hont; héb., *kohen*; arab., *kâhin*; éth., *kâhæn*, prêtre, etc. . .	*kahuna* h, prêtre, docteur, ministre, etc.
	hôn, commander.	*kena* h.
	hoou, jour.	*ao* mhz, *aho* tanga.
	hôou, pluie, pleuvoir	*hou* mh, mouiller; *ua* mh, pluie, pleuvoir.
	hono, plusieurs	*aha* h, multitude.
	horus, soleil levant, dieu . . .	*oro* t.
	hôte, hite, broyer.	*hali* h, *fati* m.
	hôte, crainte, craindre	*matau* ht.
	hote, hoti, temps, heure . . .	*fatia* s, temps, moment.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	hôlb, ***khôleb***, tuer	*fasi* s.
	hôtep, occidit sol (acca., ***kitlu***) .	*haki* ou *fati nao* m, coucher des astres.
	hôtep, joindre, lier	*fatu* m.
	houi, coudre	*kui* m, *sui* s.
	htooue, matin.	*ala* st.
	i, ***ei***, aller	*io*, *hee* m.
	ia, ***iô***, ***eia***, ***eiô***, laver.	*hooi* h, *uhi* t,
Ar.	et éth., *iamaa*; héb., *yamin*; ég., par métathèse, ***iônam***, ***ouinam***, main droite.	*iima* m, *lima* h, *rima* t, main.
	iat, voir, comprendre (ass., *idi*, je compris)	*ite* m.
	ie, ou (conj.)	*ieia* mh.
	jer, user, aiguiser	*oro* z, aiguiser, moudre.
Ass.	***igigi***, messager	*keee* m (sans doute pour *kekee*).
	jôbs, courber (héb. *gab*, *gâbab*).	*hipa*, *hipu*, m.
	iôh, ***ooh***, lune (v *ouvein* et *sin*).	*hina*, *mahina* m.
	jôl, ***jel***, nier	*ole* s.
	ioou. tumeur, enfler	*hua* mh, *uhua* m, *fuafua* s.
	jioue, voler (furari).	*aihue* h, *èia* t.
	jpo, engendrer, génération . .	*tupu* m.
	ka, épargner, pardonner . . .	*kala* h.
	kake, obscurité, ténèbres (éth., *tâkâ*)	*kekee* h, *tako* m.
	kamoou, s'obscurcir	*kumau* m, faire ombre.
Héb.	*qânâ*, creavit; *qaïnan*, creatura.	*hana* mh, créer; *hanaia* mh, créature
	kba, ***χba***, violence, vengeance .	*hoopai* h.
	kôobe, faire violence	*hoopai* h.
	ke, ***ghe***, autre.	*ke* mh.
	kel, tourner (héb. *khul*) . . .	*huli* h, *kulai* h, courber.
	keli, genoux	*kuli* h, *tuli* s.
	kelp, voler (furari)	*akilou* h, voleur.
	khala, citadelle	*koloo*, *'olo* s.
	khèibi, ombre	*keevoo* m.
	kèm, noir	*èma* s.
Ar.	***khatan***, circoncire	*koti* m, *oti*, *oki* h.
	khôk, ceindre.	*kakoo*, *kakua* h.
	khôk, ***hôke***, démanger	*kakau* m, *aako* h.
	khot, ventre	*kopu*, *opu* mh.
Ass.	***kidm***, ainsi	*keia* m.
	kôb, doubler; éth. *kabb*, rouler, pelotonner	*kavii* m, tourner, pelotonner, envelopper.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	kôb, *ȷ̱ôb*, *jôb*, *ghôb*, débile, infirme, lâche	*kopee*, *kopi* m, *'opa* s.
Hé.	*kôkab*; assy. *kakkab*, étoile . .	*koku* h.
	kote, *hot*, corbeille	*kete* m.
Accad.	*kurra*, cheval.	*kúda* malais.
	lam, resplendir	*lama* m, lumière, éclairer.
•	*las*; éth. *lisan*; héb. *lishan*; ar. *lisân*, langue	*lidah* ml, *lelo* h, *leo*. •
	lehloh, complanté	*lalaua* m, *ulu* f, bocage.
	lojlej. ægrotare, languescere, infirmitas	*lohi* m, faible, fatigué, languissant, lent.
	lôjs, pour *nôjs* (de *najhe*, dent), mordre	*nahu* mh.
	loulai, joie, être dans la joie. .	*oli*, *otioli*, *hquoli* h.
	ma, indique le lieu, à, en, dans, etc.	*ma* mh.
	maien, prodige	*mahao* m.
Ass.	*magaru*, heureux	*magalo* s, doux, agréable.
	mah, plein, être plein	*mei* t, *mahei*, t.
	maie, substance	*mea* h.
Ass.	*mar*, fils	*miro* t.
	marru, amer	*maramara* t.
	mate, beaucoup	*mati* m, *matua* s.
	mate, succès, bonheur (de *mate*, posséder)	*meitai* m, *mataa* t. bonheur.
	matoi, soldat	*toa* m.
	mauat, seul	*meha* h.
	mè, urine	*mimi* mhtf.
	me, *mèi*, vérité	*mau* t.
	mei, *mèi*, *me*, en compos. *mai*, aimer, désirer	*maimai* m, *makimaki* m.
	mekah, affliger	*makau*, *make* s, éprouver un malheur; *malhena* s, deuil.
	mèn, persister	*manoa* h, *mau* mh (¹).
	mer, lier	*mali* h.
	» , ceindre	*maro* t, *malo* h, ceinture.
	mereh, lance	*omore* t.

(¹) Le polynésien complète ici le copte, car il a encore *mana* mhs, pouvoir, fort, puissant. De là le nom du premier roi d'Égypte, *Mena*, que l'on traduit par *stable*, et qui est bien plutôt *le puissant*.

ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
merh, pointe, aiguillon . . .	*mule* h, piquer, mordre; *vero* t, dard, piquer.
mekah, douleur	*mikeo* m.
meu, mère.	*maiaia* t, mère (pour les animaux).
meue, esprit, pensée	*manao* h, penser.
mèouei, mémoire	*metao* m, *manatu* s.
mine, espèce	*mana* mh.
miok, bonne action	*maikai* s.
moh, illuminer, brûler. . . .	*mu* s, *ama* t, brûler; *maama* m, illuminer; *mahana* t, chaud, soleil.
moihe, admirable . : . . .	*mahao* m.
môit, chemin	*meheu* h.
et-mokh, indigent	*makeno* mt.
moou, *mè*, eau Les vocabulaires polyn. ne donnent pas le correspondant même, toutefois le terme existait, car on trouve quantité de dérivés : . . .	*moi* m, pituite; *mauu*, *mui* t, *moma* m, humidité; *mou* ou *mouou*, déesse de l'Océan.
ti-mou. arroser	*mou* h, arroser, mouiller.
moue, splendeur.	*moa* s.
moue, île	*moko* s, *moku* h, *motu*, *moto* t.
mounk, manquer, languir, cesser	*manaka* h, défaillance, rester.
moute, mourir	*mate* m.
moulh, cire	*momana* mh.
mour, lier	*moroita* t, être bien lié.
mout, lier	*mao* m.
mto, présence, aspect	*mata* smt.
naa, magnus ; *nashe*, multus. .	*nui* mh, grand, grandeur, nombreux.
naja-hajeh, vipera cærastes (uræus)	*niga* s, serpent.
najhe, dent	*nifo* s, *niho*, *nino* mh.
Ass. *nanur*, lumineux	*nani* mh, briller, brillant.
nau, voir	*nana* h.
ne, les	*ni* s, des.
nef, souffler, respirer	*nae* m.
nèj, être couché.	*nofo* s, *noho*, mht, s'asseoir, siéger.
nese, beau	*nani* mh, beau, beauté.
noj, *nogh*, blâmer	*onaki* m.
nou, mien	*no-au*, *no'u* m.
nou, *nouk*, ton, tien (pour hommes)	*nou* mh.

ÉGYPTIEN.		POLYNÉSIEN.
	nou, temps présent.	*nei* mh.
	tenou, à présent	*te nei* m.
Ass.	*nouah*, esprit	*naau* h, *uhane* h.
Héb.	*nun*, sobolescere.	*hanau* mh.
	noun, abîme	*nanao* h, *anoano* t, *hohonu* mh.
Ass.	*nun*, dieu de l'abîme, ichthyomorphe	*Hanau* m, dieu des poissons.
	ôbe, presser, exprimer. . . .	*kôvi* mh, *oomi* m.
	oi, être	*ai* mh.
	onah, vivre, vie (éth. *hâlw*) . .	*ola* hs, *ora* t.
	ani, imiter.	*hani* m.
Héb.	*or*, soleil, lumière	*Oro* t.
	. *ouai* (*bai*, *vai*), quelqu'un. . .	*vai* mh.
	ouah, ajouter	*oua* h, étendre.
	ouahe, station, halte, *oasis* . .	*oioiana*, station pour les voyageurs
	ouan (ban), terre	*benua* ml, *henua* m, *honua* h, *fenua* s.
	oue, *ouei*, distance, être éloigné.	*aui*, *auvi* s.
	ouèh, station, faire halte . . .	*oioi* h, se reposer.
	ouert, *thôout*, statue, colonne .	*ata* ms, *tii* t, statue, image.
	ouebouele, se lamenter. . . .	*olo* h.
	ouhor, chien	*uri* t.
	oulle, chant (héb. *hâlal*, splenduit, cecinit, laudavit. *Hallelu-Jah.*)	*ula* m, *oli* h, chant, chanter joyeusement, tressaillir de joie, délices.
	ouô, germe	*hoe* m, *hui* m.
	ouôh (pour *bôh* et *pôh*), habiter.	*api* s.
	ouôh, couvrir	*vehi*, *vihi* t.
	ouoein, lumière	*hina*, *hinahina* mh, briller.
	ouohi (*vohi*), pêcheur	*avaia*, *avaika* m.
	ouôn, partie	*huua* mh.
	» (*vôn*), ouvrir	*uvee*, *uvai* h, *vahi* mh.
	ouônh (*vônh*), vision, apparition.	*vainehae* m.
	ouôt, vert, verdoyant	*ao* h, verdoyant ; *hooao* h, verdoyer.
	ouro, *erro*, *erra*, roi (de *ro*, tête).	*uru* t, *ulu* sl, tête, chef.
	pah, *pôsh*, *pots*, fendre, diviser.	*pahe*, *pae* m, *vahi* mh.
	pahre, remède	*epau* m, *rapaáu* t.
	pash, filet	*upeka* m, *upega* s, *upeá* t.
	pasht, déesse à tête de chatte .	*potu* m, chat.
	pe, supérieur	*pio* mh
	phat, *fat*, pied, genou	*paa* (Philippin.) ; *vae* m, pied, genoux.
Héb.	*pheæ*, éth *afe*, arab. *fua*, bouche.	*vaha*, *aha* h, *fafa* m, *haha* m.
»	*phâtakh*, aperuit.	*puta* m.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
HÉB.	*phélakh*, porte	*puta* m.
»	*phua* (arab. *fâh*), souffler . . .	*puhe* mh.
	poi, siège	*papaoa* m.
	pôth, frapper, sculpter	*pata*, *patu* mt.
	ra, soleil	*ra* t, *sa* mhs.
	ra, faire, action	*rava* t.
	rime, pleurs, pleurer	*roimata* t.
	rôhe, laver.	*horoi* t.

Le *s* n'existe pas dans beaucoup de dialectes polynésiens.

	salsel, consoler	*oluolu* h.
ASS.	*samas*, dieu-soleil	*sama* s, jaune (venu de la couleur du soleil, et primitivement sans doute soleil).
	seb, *sebek*, dieu assimilé à Saturne	*siva* s, dieu (tout un ensemble de faits à rétablir).
	sebi, circoncire	*tefi* s.
	sek, *kek*, tirer, écorcer, écorcher.	*sae*, *saega* s.
	sha, nez.	*isu* s.
ÉTH.	*shahak*, héb. *tsâkhag*, ar. *saḥak*, lat. *cachinno*, rire ; armor. *gôgea*, franç. goguenarder, etc. .	*kokiki* m, *aka* h, *akaaka* mh.
HÉB.	*shâlam*, salvus fuit.	*saloa* s, merci ! etc.
AR.	*shamas*, briller	*aama* t.
ÉTH.	*shamer*, se détester; *shemure*, agréable.	*komala*, agréable (cap *Comorin*).
	shine, rechercher, éprouver . .	*koni*, *honi* h, flairer, baiser (c'est l'acte d'éprouver une personne).
	shns, lin : *shne*, filet ; *shnt*, plier, tresser (d'où le *shentô*, sindon).	*hana* mh, *hauna* t, tresser, plier, *tenun* ml, tissu.
	shnosh, infection. . , . . .	*hono* m.
	shôl, faute	*sala* s.
	shôl, *ghôl*, saisir, voler (furari) .	*hole* m, *haru* t.
	shot, dureté, violence	*hita eta* t.
	shoushou, honorer, sacrifier . .	*kakuai* h, honorer, sacrifier.
	sili, foramen ; *shôlah*, incisio. .	*sala* s, couper ; *salia*, blessé.
AR.	*salaa*, *silaa*, crevasse, blessure .	*sila* s, ulcère.
ASS.	*sin*, le dieu-lune.	*sina* s.
	sôbh (restitué); éth. *zab*, *zabab*, coercere.	*supa* s.
	sôbah, lèpre	*supa* s.
	slajlej, amincir, alléger . . .	*lahilahi* h.
	smoune, oiseau, poule de Pharaon	*moa* mht, poule.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	smot, figure, forme	*mata* m.
	sok, sac.	*kaka* m.
	sôli, essuie-main, mouchoir . .	*solo* s, *soloi* s.
	sômk, sucer	*omo* mh.
	sorte, couteau.	*seleta* s.
	soouhe, œuf	*hua* h, *fua* s.
Héb.	*souph*, finir ; syri., chald., arab., *sâf*, perire fecit, exterminavit.	*siù*, *iù* (pour *siv*, *iv*), fin, finir.
	tagh, masse	*toko* m.
	taghs, prendre, saisir	*taho* t, *tako* m.
	tako, décliner, périr.	*taha* t.
	tahe, *tashe*, abonder	*tae* m
Ar.	*taher*, pur ; *tahhar*, purifier . .	*tahaha* m.
	taibe, coffre, arche ; héb. *tebâ* ; arab. *tâbouh*	*tifa*, *tiha* m.
	taio, don	*tae* mh.
	taio, honorer	*tei* t, *kaie* m.
	tamio, créer, fonder.	*tumu* m.
Ass. Phén.	*Tammouz*, jeune soleil . .	*tâma*, fils, soleil (étymologie ignorée de Tammouz).
Ass.	*tamti*, mer	*tai* mt.
	taoue (tabe), émettre, produire .	*tupu* m, produire ; *tafa* s, poindre.
	taue, » » .	*to* mst.
	taue, nommer, dire, raconter. .	*tau* s.
	taue, invoquer.	*tau* t, *talo* s.
	tar, pointe.	*tara* t.
	te, être	*tu* s.
	teb, figue ; héb. *tena*, banane . .	*tene* s, banane.
Ar.	*tekâ*, appuyer, étayer	*toko* m.
	tenno, frapper, briser, écraser .	*tuni*, *tuki* m (*tania*, écrasé).
	tèu, vent	*tiu* mh, vent du nord.
	thmo, chauffer	*tamahana* t.
	ti, donner	*to* s, *tua* m.
	ti, querelle, combat	*toua* m.
	tibes, talon	*tuevae* m.
	tiouô (*tibô*), germer, croître . .	*tupu* smtf.
Ass.	*tirra*, tire (du v. tirer)	*taere* t, tirer.
	titôn, disputer	*tautaki* m.
	tkas, douleur	*tigâ* s, *tatoke* m.
	toe, tache sur la peau	*tane* s, *oteote* t.
	tôgh, écraser, pétrir.	*tuki* m.
	» joindre	*tui* m, *tuati*, *taati* t.
	» cuire.	*tunu* m.
	toghe, plante	*toga* s.

	ÉGYPTIEN.	POLYNÉSIEN.
	tôks, piquer, percer.	*tikao* m.
	tômes, ensevelir	*tomi* m.
	tôn, *tooun*, lever, se lever. . .	*tu* m, *tula* s.
	tonou, beaucoup	*teni* m.
	toou (*tob*), montagne	*tuaivi* m.
	tôp, habitude, habituer. . . .	*tu* s, coutume; *tipona* m, répéter.
	tôsh, commander.	*tekao* m.
	tota, celui qui frappe (roi d'Égypte)	*ta* mb, *tata* m, *tatui* f, frapper.
	tote, *oti*, vulva	*toute* s, *toe* m.
	toubo, purifier, sanctifier . . .	*tapu* mh; sacré, interdit.
	touie, allaiter (éth. *tabô*, sugere).	*tuuvaiu* m, allaiter.
	touo, resplendir	*tea* m, jour, *ata* s, rayonnement solaire.
	touôt, *thôout*, statue.	*ata* m (pour *tata*, de *tata*, frapper).
HÉB.	*ur*, *or* (ass. *urru*), feu, lumière.	*ura* t, flamme, *uraara* t, luire.
ÉTH.	*warehe*, tigré, *woreh*, plur. *durah*; héb. *arah*, lune, mois .	*waurat* (formose), *wurah*, *wulan*, *bulan* (presque toute l'Océanie), lune, mois.
ÉTH.	*zagâme*, égy. *jaghè*, gauche; assy. *sumela*, à gauche. . .	*sema* f, *hema* h, gauche.

333 TERMES.

Faut-il résumer le tableau? Comment ne pas reconnaître l'intime parenté de deux langues qui ont des rapports comme ceux-ci :

Le dieu-soleil.	*Râ*	*Ra* t.
Le dieu-lune	*Sin*	*Sina* s.
Le jeune soleil	*Horus*	*Oro* t.
ou.	*Tammouz*. . .	*Tàma* s.
Le dieu-ichtyomorphe . .	*Nun* ou *Anou* .	*Hanau* m.
Le dieu-taureau	*Hâpi*	*Sàpi* ml.
Le prêtre	*kohen*	*kahuna* h.
Le feu	*habi*.	*afi* s.
L'eau	*moou*	*mou* t.
Pleuvoir	*hôou*	*hou* mh.
La terre	*ban*	*benua* ml.
La vie	*onah*	*ola* sh.
Le cœur	*hèt*	*hâti* ml.
Un chef.	*hik*	*haku* m.
Un serpent.	*hof*	*ofi* t.
Une plante.	*toghe*	*toga* s.
La lèpre	*sôbah*	*supa* s.
Consacrer	*tubo*.	*tapu* m.

§ II. — Grammaire.

Une correspondance si complète, qui se prolongerait sur un vocabulaire entier, nous dispenserait bien de parler de grammaire; cependant on ne pourra que gagner à une briève comparaison. Afin de ne pas faire un travail interminable et inutile sur tous les dialectes polynésiens et tous les idiomes sémitiques, nous nous contenterons de rapprocher le langage de *l'île-mère,* Samoa, avec celui de l'Égypte, d'après les grammaires du P. Violette pour le premier, de Peyron pour le copte.

ÉGYPTIEN.	SAMOAN.
1. La plupart des racines sont monosyllabiques.	La plupart des racines sont monosyllabiques ou dissyllabiques.
2. Les termes sont invariables, et deviennent adjectifs, substantifs, verbes par l'adjonction de particules.	Les termes sont invariables, et sont à la fois adjectifs, verbes, particules.
3. On se sert des articles définis et indéfinis :	Id.
Art. déf. : *pe*, masc. . . . . . (Arabe : *al* pour tout genre et nombre).	Art. déf. : *le* des deux genres (comme l'arabe).
Art. ind. : *ou*, un . . . . Plur. *en*	Art. ind. : *se*, un. Plur. *ni*, des.
4. Masculin, féminin, pas de neutre .	Id.
5. Singulier et pluriel, pas de duel. .	Id.
6. Six cas	Id.
7. Le superlatif se forme par l'addition de *matua*, très.	Id., avec *mate, emate*, très.
8. Pron. pers. : *entôten,* vos; aux cas obliques, *teùten.*	*tou, outou,* vos.
entoou, illi, illæ	*latou*, eux, elles.
9. *poi*, meus.	
tôi, mea	*tou* m, mon, mien, ma.
noui, mei, meæ	*nou* ms, mon, ma, mien.
nou (pour les femmes), *n ouk* (pour les hommes), tui, tuæ.	*nou* ms, ton, tien.
10. Les déclinaisons se font à l'aide de préfixes.	Id.

ÉGYPTIEN.	SAMOAN.
11. Le verbe reste invariable. Des préfixes indiquent les personnes et les temps.	Id.
12. Le mode le plus ordinaire de former le passif est de changer la voyelle radicale en *è* : *sah*, scribere, *sèh*.	Le passif est indiqué par *e* ou *i* ajouté séparément au verbe : *ua fasia*, il tua ; *ua fasia i*, il fut tué.
13. Les verbes causatifs se forment en préfixant *he* en hébreu, chald., syriaque, *a* en arabe, éthiop.	Les mêmes verbes se forment en préfixant, suivant les dialectes, *haa*, *hoo*, *faà*.
14. *Ti* (ou *T*), donner, se préfixe souvent aux verbes avec son sens.	Id.
15. Les redoublements sont fort usités.	Id.
16. Grande accumulation de voyelles .	Id.

Déjà l'on s'était aperçu que *quelques termes* de la Polynésie ressemblaient à ceux de l'Égypte, et, surpris, on cherchait à expliquer le fait par certaines relations maritimes entre les deux contrées; mais il s'agissait de bien autre chose que de *quelques termes*, il y allait de toute la langue et de toute la famille. On avait également remarqué que la grammaire malayo-polynésienne rappelait celle de l'hébreu : le P. Mathias, l'un des premiers missionnaires aux Marquises, en était frappé, et M. Favre, dans sa grammaire malaise, résume un parallèle établi par Robinson entre le malais et l'idiome de la Bible. Or, l'affinité n'est pas seulement avec l'hébreu, elle est avec toutes les langues sémito-koushites, par la raison très simple que le *polynésien est du plus pur koushite*.

Nous ne pouvons présenter ce travail du R. P. Étienne aux membres de la Société scientifique sans y joindre quelques objections qui nous paraissent sérieuses.

La relation qui existe entre les langues sémitiques et polynésiennes est celle d'une langue moderne à une langue ancienne. Il s'ensuit que par rapport aux idiomes sémitiques les dialectes polynésiens doivent accuser une déperdition phonétique et

grammaticale. Or on ne constate pas cette déperdition. Si l'évolution grammaticale est complète en sémitique, dans le malayo-polynésien elle n'a pas commencé. Un exemple suffira : le nom est encore à peine distingué du verbe. En effet, sans nier que les idiomes de la Polynésie nous ramènent comme les langues sémitiques à des racines nominales, il n'en est pas moins vrai de dire que le verbe n'est jamais parvenu à se former en polynésien (1).

Quant aux comparaisons des mots, on peut douter qu'elles présentent les garanties suffisantes de certitude. Elles ne sont pas basées sur une *lautverschiebung* nettement et préalablement établie par des principes démontrés. Ce sont parfois des formes onomatopéiques, propres à tous les langages articulés. Par conséquent on doit se demander si plusieurs des rapprochements proposés ne sont pas simplement fortuits et tels qu'un chercheur patient en trouverait entre toutes les langues. Surtout, en ce qui concerne le sémitique, il faut de la prudence : les mots se présentent sous une forme secondaire ou avec des significations dérivées différentes du sens originel auquel il faudrait pouvoir remonter. D'autre part, nous ne connaîtrons jamais les racines des idiomes polynésiens, parce que nous ne pouvons comparer que des dialectes vivants et que les formes les plus primitives auxquelles nous conduit une telle comparaison sont relativement modernes (2).

Cependant, nous tenons à le répéter, les faits produits par le R. P. Étienne sont curieux. Ils méritent d'être signalés et nous ne doutons pas qu'ils ne constituent un sérieux appoint pour la thèse de l'origine koushite des peuples de l'Océanie, ou du moins pour celle des rapports préhistoriques des Sémites et des Polynésiens.

---

(1) SAYCE, *Principes de philologie comparée*, trad. Jovy, pp. 68, 213.
(2) SAYCE, *Op. cit.*, p. 51.

NOTE

SUR

QUELQUES DÉPÔTS LITTORAUX

DES ENVIRONS DE BRUXELLES

PAR

le Cte Adolphe de LIMBURG-STIRUM.

La partie moyenne du terrain éocène, en Belgique, se divise en deux étages : le système bruxellien à la base et le système laekenien au sommet.

La plupart des géologues français et belges considèrent les sables bruxelliens comme représentant la partie inférieure du calcaire grossier dans le bassin de Paris ou des couches de Bracklesham en Angleterre. Cependant M. de Lapparent [1], à la suite de MM. Carez et Monthiers, est plutôt porté à y voir l'équivalent des sables à têtes de chat du Soissonnais, inférieurs au calcaire grossier. Du reste, la discussion de ces opinions a peu d'importance dans les questions de détail qui vont nous occuper.

Lorsque Dumont créa le système bruxellien, il y comprit, avec les sables et les grès du massif entre la Geete et la Senne, les sables coquilliers d'Aeltre et de Gand, qui constituent le sous-sol de la Flandre. Il considérait donc ce terrain comme s'étendant depuis la Hesbaye à l'est jusqu'à la mer à l'ouest.

Plus tard, après de nouvelles recherches sur la faune d'Aeltre, on se décida à retrancher toute la partie occidentale du système bruxellien et à la classer comme éocène inférieur. Ce système,

[1] *Traité de géologie*, p. 1005.

réduit de moitié, ne comprenait donc plus que le massif situé à l'est de la Senne. Au delà de cette rivière, on n'en trouve plus qu'un lambeau insignifiant, à Over-Heembeek.

Cette subite disparition du système entre les deux versants de la vallée de la Senne n'était point facile à expliquer. Plusieurs hypothèses furent émises sur ce sujet; une entre autres l'emporta, celle qu'André Dumont avait déjà, en germe, exprimée dans ses notes, à savoir : l'existence d'une faille dans la vallée de la Senne.

Actuellement cette solution a été écartée, surtout par suite des études de MM. Cogels et van Ertborn (1). Tous les géologues qui s'occupent de nos terrains tertiaires admettent que le golfe où se sont déposés les sédiments bruxelliens se terminait régulièrement à l'endroit où s'est creusée la vallée de la Senne.

Nous croyons cependant qu'il est possible de trouver quelques lambeaux de ce littoral qui ont échappé à l'action des érosions quaternaires. Ce sont les dépôts qu'on rencontre aux environs de Bruxelles, et qui ont été rangés dans le terrain éocène inférieur sous le nom de « littoral panisélien » (2).

On les rencontre au nord de Bruxelles à Helmet (Schaerbeek); au sud, à Saint-Gilles et à Calevoet.

Ce littoral se compose d'un gravier glauconifère, renfermant un grand nombre de débris de poissons et de cailloux noirs avec des empreintes de fossiles. Au-dessus viennent des lits submarneux, fossilifères. Le gisement d'Helmet n'existe plus, mais ceux de Calevoet sont célèbres par l'abondance des fossiles et le grand nombre de leurs espèces. Tous les auteurs qui en ont parlé s'accordent sur le caractère littoral bien accusé de ce dépôt.

Toutefois la faune qu'on y trouve s'écarte assez de celle du terrain bruxellien, auquel nous voulons la rattacher.

---

(1) *Annales de la Société géologique de Belgique*, t. IX, 1882. La coupe reproduite à la fin de ce travail, dressée d'après des sondages artésiens, montre bien l'absence de faille dans la vallée de la Senne.

(2) VINCENT, *Annales de la Société malacologique de Belgique*, t. IX, 1874, p. 70.

Voici le motif qui nous porte à proposer cette modification dans l'échelle de nos terrains : on retrouve des dépôts identiques aux littoraux de la vallée de la Senne, à l'autre extrémité du bassin bruxellien, dans la vallée de la Grande-Geete.

Deux gisements principaux sont situés l'un à Autgaerden (Zétrud-Lumay), l'autre à l'est de Jodoigne. Entre les deux se rencontrent plusieurs affleurements qui présentent les mêmes caractères essentiels.

Le premier gisement, celui d'Autgaerden, a une ressemblance frappante avec le dépôt de Calevoet. Il se compose, à la base, d'un gravier glauconifère à très gros éléments, dont les cailloux atteignent parfois la grosseur du poing. Ces galets se composent, comme à Calevoet, de silex noirs, de grains de quartz et de gros débris à peine arrondis de roches siluriennes. Plus haut, ces débris se mêlent à des lits calcareux, renfermant des nodules d'argile grise ou verte. Le tout constitue une sorte de brèche très friable, où les fossiles sont mal conservés. Ces lits sont compris dans une couche épaisse de sables glauconifères et graveleux, dont la stratification est très compliquée.

Quant aux fossiles, la faune est la même qu'à Calevoet et à Helmet. Les espèces les plus caractéristiques sont : *Xantopsis bispinosus, Otodus striatus, Calyptræa trochiformis, Centhium Leufroyi, Paracyathus crassus,* etc. J'y ai recueilli un grand nombre d'espèces, dont plusieurs sont encore inédites.

A une lieue au sud se trouve le gisement de Jodoigne, moins bien caractérisé que celui d'Autgaerden, mais remarquable surtout par l'abondance de ses Nummulites, dont on citait l'absence comme un caractère des couches bruxelliennes.

Un autre point de ressemblance entre les dépôts de la vallée de la Geete et ceux des environs de Bruxelles, c'est que sur la rive gauche ils ont l'épaisseur et l'aspect normal du terrain bruxellien, tandis que sur l'autre rive ils sont réduits aux couches dont nous venons de parler, pour disparaître quelques kilomètres plus à l'est. La coupe-diagramme qui accompagne ce travail donne d'une manière très suffisante l'idée de la stratification générale des collines de la Geete.

Nous pouvons déjà reconnaître une grande ressemblance entre les deux extrémités des couches que nous étudions. Il y a plus : ce gravier ou cette brèche d'Autgaerden, si semblable au gravier littoral de Calevoet, appartient au terrain bruxellien. On peut suivre pas à pas, dans les nombreuses tranchées et dans les affleurements des environs, les dégradations insensibles du système bruxellien jusqu'à sa limite extrême. D'ailleurs, M. Rutot, qui a signalé le premier le gisement d'Autgaerden à l'attention des géologues, est d'avis, ainsi que nous, qu'il doit être considéré comme représentant la base du système.

Nous tirerons donc de ces observations la conclusion que, si les dépôts de la vallée de la Geete sont bruxelliens, leurs équivalents de la Senne le seront également et constitueront comme eux les vestiges d'un ancien littoral.

Sur un point cependant on pourrait élever une objection : d'après M. Rutot [1], les sables grossiers bruxelliens de Calevoet ravinent la couche qui nous occupe et en sont distincts, ce qui exclurait l'idée d'une communauté d'origine pour les deux formations. N'ayant pas moi-même observé le cas, je ne puis en tirer aucune conséquence. Je crois cependant que ce ravinement pourrait n'être qu'apparent et produit par la stratification irrégulière du dépôt, telle qu'on la trouve à Autgaerden.

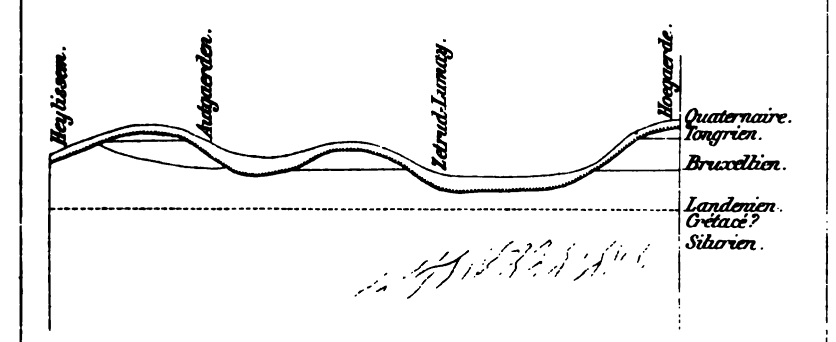
NOTE.

Dans le texte explicatif de la Feuille géologique de Bruxelles, paru depuis la session du mois d'avril, MM. Van den Broeck et Rutot donnent quelques détails sur les mêmes dépôts littoraux. Ces géologues les considèrent toujours comme appartenant à l'étage panisélien du système éocène inférieur.

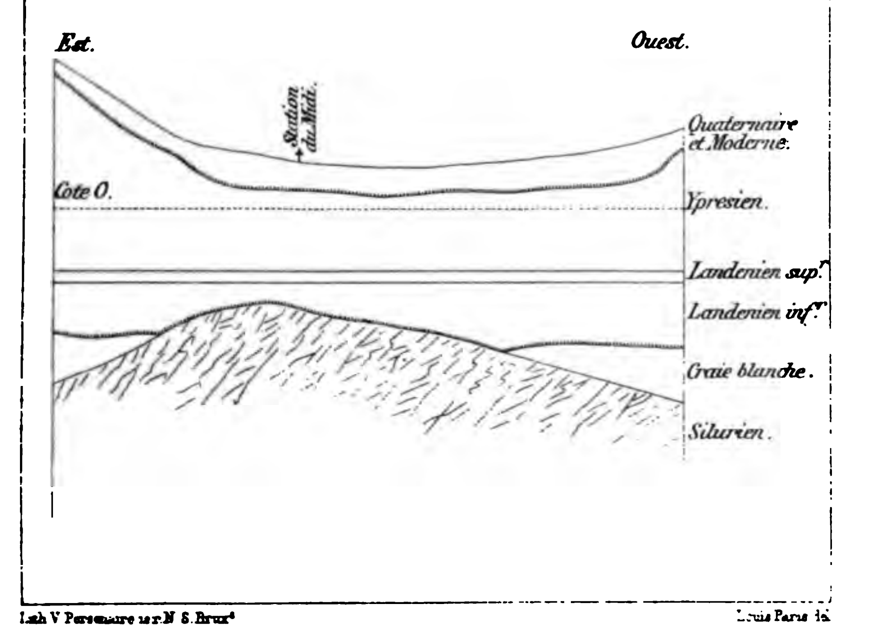
---

[1] *Annales de la Société malacologique*, 1880.

Coupe schématique de la vallée de la Geete, entre Hoegaerde et Heylissem.



Coupe de la vallée de la Senne à Bruxelles-Midi, d'après MM. P. COGELS et O. VAN ERTBORN.



Lith V Pesemaire

Louis Paris

NOTES

D'OSTÉOLOGIE ERPÉTOLOGIQUE

PAR

L. DOLLO

Ingénieur,
Aide-naturaliste au Musée royal d'histoire naturelle de Belgique,
à Bruxelles.

I

SUR UNE NOUVELLE DENT DE CRASPEDODON, DINOSAURIEN DU CRÉTACÉ SUPÉRIEUR DE LA BELGIQUE.

J'ai fait connaître, il y a environ deux ans, dans le *Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique* (1), un Dinosaurien inédit de la glauconie argileuse hervienne de Lonzée (2), qui, comme on le sait, appartient au Sénonien moyen. Ce Dinosaurien, herbivore de l'ordre des *Ornithopoda* (3), auquel je donnai le nom de *Craspedodon lonzeensis*, était représenté dans les collections du Musée par deux dents sensiblement de même taille, n'ayant pas encore servi à la mastication et dont la racine est brisée un peu au-dessous du collet. Je reproduis ci-contre mes figures d'une des dents du *C. lonzeensis*.

Depuis cette époque, le Musée de Bruxelles a acquis, à

---

(1) L. DOLLO, *Note sur les restes de Dinosauriens rencontrés dans le Crétacé supérieur de la Belgique*. (BULL. MUS. ROY. HIST. NAT. BELG., 1883, t. II, p. 215.)

(2) *Mémoires sur les terrains crétacé et tertiaires*, préparés par feu André Dumont et édités par M. Michel Mourlon, t. I, p. 424.

— C. MALAISE, *Description de gîtes fossilifères dévoniens et d'affleurements du terrain crétacé*, pp. 57 et suiv.

(3) O.-C. MARSH, *The classification and affinities of Dinosaurian Reptiles*. (NATURE, 20 novembre 1884, p. 68.)

diverses reprises, des fossiles de Lonzée et, parmi les envois reçus, j'eus la satisfaction de constater l'existence d'une dent de

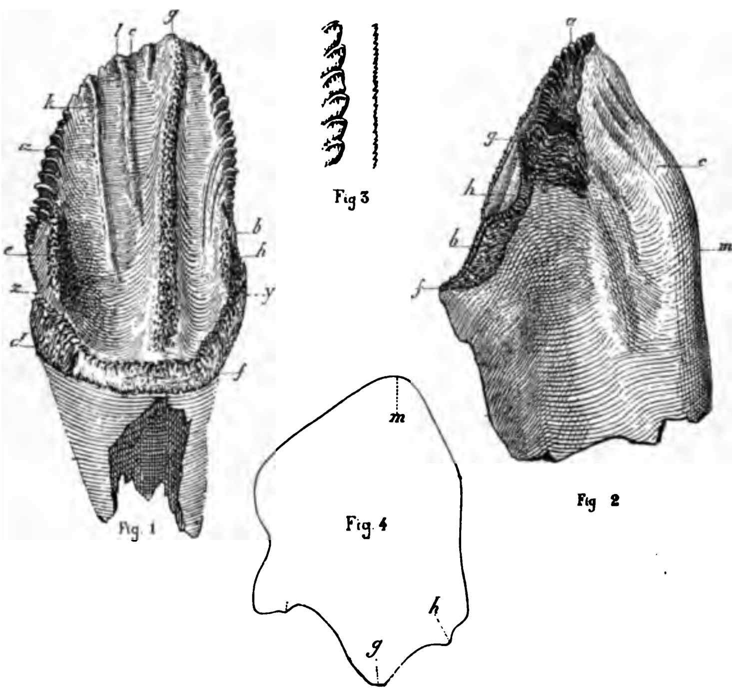


FIG. 1. — Dent du Dinosaurien de Lonzée (*Craspedodon lonzeensis*, Dollo).
Échelle : $^2/_1$. Face émaillée.

a. Partie du bord ornée de grandes dentelures.
b. Partie du bord ornée de fines dentelures.
c. Couronne.
d. Collet.
e. Première crête secondaire finement dentelée et longeant le bord de la couronne.
f. Rebord finement dentelé au niveau du collet.
g. Crête primaire finement dentelée.
h. Deuxième crête secondaire finement dentelée et longeant le bord de la couronne.
k. Première crête tertiaire lisse.
l. Deuxième crête tertiaire lisse.
m. Dos d'âne correspondant sur la face non émaillée à la crête primaire dentelée de la face émaillée.

FIG. 2. — La même. Échelle : $^2/_1$. Vue de profil.

FIG. 3. — Séries, plus fortement grossies, de grandes dentelures et de fines dentelures pour la comparaison.

FIG. 4. — Coupe suivant *xy*, montrant la compression antéro-postérieure. Échelle : $^2/_1$.

Craspedodon, qui va me permettre de compléter les indications fournies par moi antérieurement.

Et d'abord, que la nouvelle dent appartient bien au *Craspedodon*, c'est une chose surabondamment démontrée :

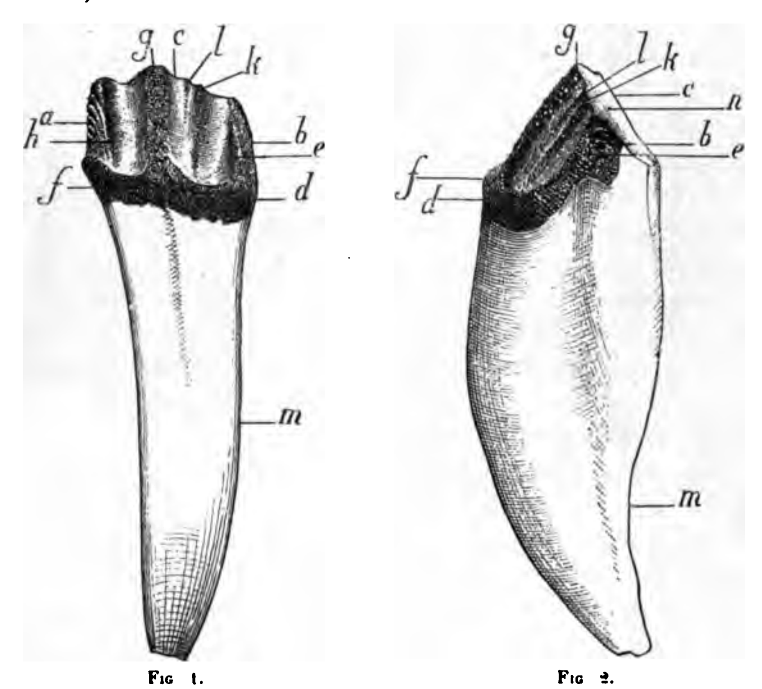


Fig 1. Fig 2.

Fig. 1. — Nouvelle dent du Dinosaurien de Lonzée (*Craspedodon lonzeensis*, Dollo). Échelle : $^2/_1$. Face émaillée.

Fig. 2. — La même. Échelle : $^2/_1$. Vue de profil.

Lettres communes aux deux figures :

a. Partie du bord ornée de grandes dentelures.
b. Partie du bord ornée de fines dentelures.
c. Couronne.
d. Collet.
e. Première crête secondaire finement dentelée et longeant le bord de la couronne.
f. Rebord finement dentele au niveau du collet.
g. Crête primaire finement dentelée.
h. Deuxième crête secondaire finement dentelée et longeant le bord de la couronne.
k. Première crête tertiaire.
l. Deuxième crête tertiaire.
m. Dépression correspondant à la dent de remplacement.

1. Par sa forme comprimée dans le sens antéro-postérieur.

2. Par le ressaut séparant, au niveau du collet, la face émaillée de la racine.

3. Par la portion du bord de la face émaillée munie de grandes dentelures.

4. Par la région du collet de la même pourvue de fines dentelures.

5. Par la présence sur la même encore :

α. D'une crête primaire finement dentelée;

β. De deux crêtes secondaires aussi finement dentelées, situées de part et d'autre de la crête primaire;

γ. De deux crêtes tertiaires placées d'un même côté de la crête primaire (entre celle-ci et la crête secondaire de ce côté), la plus grande en étant la plus éloignée.

Cela posé, notre dent diffère de celles précédemment décrites :

1. En ce qu'elle est fortement usée par la mastication;

2. Parce qu'elle possède sa racine.

La *surface d'usure* est, comme chez l'*Iguanodon,* constituée par un plan oblique sur l'axe longitudinal de la dent, plan qui exhibe à peu près la même inclinaison sur cet axe que la face émaillée à laquelle il est opposé. Il se distingue pourtant de celui qu'on observe souvent dans les Dinosauriens de Bernissart en ce qu'il n'est pas limité vers la racine par un rebord. Chez les Iguanodons, en effet, il arrive fréquemment que la dent en regard de celle considérée ne s'avance point suffisamment loin durant la mastication pour produire une section oblique parfaite de la couronne, mais laisse, au contraire, intacte la portion de cette section voisine de la surface, ce qui donne naissance à un ressaut. Il résulte encore des lignes ci-dessus que la surface d'usure de la dent du *Craspedodon* est tout autre que celle de certains Dinosauriens sauropodes (¹) [*Neosodon* (²)], où il y a

(¹) O.-C. MARSH, *The classification, etc.*, p. 68.

(²) M. DE LA MOUSSAYE, *Sur une dent de* Neosodon *trouvée dans les sables ferrugineux de Wimille.* (BULL. SOC. GÉOL. FRANCE, 1884, t. XIII, p. 51.)

— L. DOLLO, *Le* Neosodon. (REV. D. QUEST. SCIENT., publiée par la *Soc. Scient. de Bruxelles,* 20 avril 1885, p. 627.)

un biseau d'usure rappelant ce qu'on voit sur les molaires des Édentés phytophages (*Cholœpus*).

La *racine* est longue, presque entière, se rétrécissant graduellement, comme on s'éloigne de la couronne, pour se terminer en une pointe. Ainsi que le reste de la dent, elle est fortement comprimée dans le sens antéro-postérieur. Sa région tournée vers la face émaillée est très franchement convexe dans les deux directions longitudinale et transversale. Par contre, la partie regardant vers le plan d'usure est d'abord rectiligne longitudinalement et convexe transversalement; puis, dans sa moitié comprenant l'extrémité libre, elle présente un évidement extrêmement net, indiquant la position de la dent de remplacement.

La situation de cet évidement, de même que celle du plan d'usure, nous fait conclure que la nouvelle dent devait être implantée dans le susmaxillaire gauche et, si elle provient d'un animal adulte, qu'elle était vraisemblablement placée dans le voisinage du prémaxillaire du même côté. La considération de cette dent et de celles non encore usées par la mastication nous amène à penser que *Craspedodon lonzeensis* a pu atteindre la taille de l'*Iguanodon Mantelli*.

Il y aura donc lieu de modifier de la manière suivante notre diagnose du Dinosaurien de Lonzée :

CRASPEDODON LONZEENSIS, Dollo.

Dents fortement comprimées dans le sens antéro-postérieur et possédant un aspect franchement asymétrique.

Couronne arrondie au sommet et séparée de la racine par un ressaut situé sur la face émaillée, au niveau du collet.

Face émaillée portant cinq crêtes : une (crête primaire) très accentuée, finement dentelée, allant du sommet au collet et non située sur le milieu de la face; deux autres (crêtes secondaires), plus faibles, également pourvues de fines dentelures, placées, une de chaque côté de la crête primaire, près des bords latéraux qu'elles contournent, commençant à mi-hauteur de la face émaillée et se terminant au collet; deux autres (crêtes tertiaires),

plus faibles encore, se trouvant du même côté de la crête primaire, entre cette crête et la crête secondaire de ce côté, lisses, prenant leur origine au sommet de la dent et ne descendant qu'à mi-chemin de la face émaillée. Enfin, le sommet et la moitié supérieure des bords latéraux de celle-ci sont munis de larges dentelures; le reste desdits bords et le contour du ressaut sont finement dentelés comme les crêtes.

Face opposée à la face émaillée fortement convexe transversalement, formant un dos d'âne dont le sommet n'est point dans le plan médian de la dent, mais correspond à la crête primaire.

Surface d'usure de la couronne constituée par un seul plan oblique sur l'axe longitudinal de la dent, plan possédant à peu près la même inclinaison sur cet axe que la face émaillée à laquelle il est opposé. Pas de rebord à l'extrémité de la surface d'usure la plus rapprochée de la racine.

Racine longue, se rétrécissant graduellement, comme on s'éloigne de la couronne, pour se terminer en une pointe. Ainsi que le reste de la dent, la racine est fortement comprimée dans le sens antéro-postérieur. Elle présente, dans sa moitié la plus éloignée de la couronne, un évidement indiquant la position de la dent de remplacement.

Dimensions de C. LONZEENSIS : vraisemblablement celles de l'*Iguanodon Mantelli.*

Gisement : glauconie argileuse hervienne (Sénonien moyen).

Localité : Lonzée, près Gembloux (Namur).

Restes connus : trois dents faisant partie des collections du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique, à Bruxelles.

Le genre *Craspedodon* porte à douze le nombre des genres bien définis de l'ordre des *Ornithopoda*. Ce sont :

1. *Agathaumas*, Cope.
2. *Camptonotus*, Marsh.
3. *Cionodon*, Cope.
4. *Craspedodon*, Dollo.
5. *Diclonius*, Cope.
6. *Hadrosaurus*, Leidy.
7. *Hypsilophodon*, Huxley.
8. *Iguanodon*, Mantell
9. *Laosaurus*, Marsh.
10. *Nanosaurus*, Marsh.
11. *Orthomerus*, Seeley.
12. *Vectisaurus*, Hulke.

Pour terminer cette courte notice, je rappellerai les considé-

rations générales que j'ai développées dans mon travail cité ([1]), sur la dentition des Dinosauriens :

« ..... Je désirerais présenter encore quelques observations sur les dents des Dinosauriens herbivores en général. C'est un fait connu que, si l'on part des Ongulés éocènes pour remonter jusqu'aux temps actuels, on constate une remarquable évolution de la dentition que les admirables travaux de W. Kowalevsky ([2]) ont surtout mise en lumière.

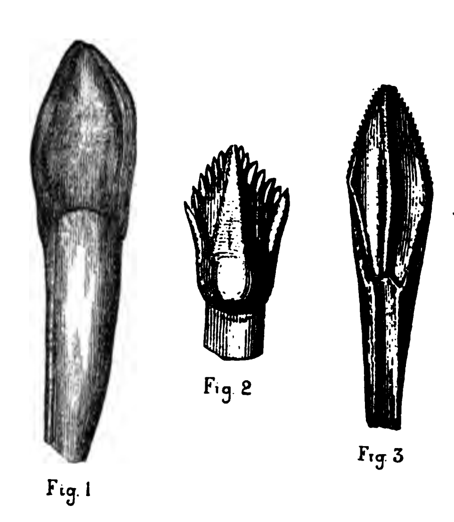


FIG. 1. — Dent de *Morosaurus*, Marsh (*Morosauridæ* — SAUROPODA) (d'après Marsh).

FIG. 2. — Dent de *Scelidosaurus*, Owen (*Scelidosauridæ* — STEGOSAURIA) (d'après Owen).

FIG. 3. — Dent d'*Hadrosaurus*, Leidy (*Hadrosauridæ* — ORNITHOPODA) (d'après Leidy).

» Sans vouloir prétendre qu'on puisse, dans l'état actuel de nos connaissances, suivre d'une manière aussi précise les trans-

([1]) L. DOLLO, *Dinosauriens du Crétacé supérieur de la Belgique*, p. 219.

([2]) W. KOWALEVSKY, *Monographie der Gattung* Anthracotherium, Cuv. *und Versuch einer natürlichen Classification der fossilen Hufthiere*. (PALEONTOGRAPHICA, 1876, vol. XXII, pp. 270 et suiv.)

formations des dents chez les Dinosauriens herbivores, je crois que les faits ci-après n'en sont pas moins très intéressants à mentionner :

» I. Les types les plus généralisés des Dinosauriens herbivores (*Sauropoda*), principalement jurassiques et ne s'élevant pas au-dessus du Weald, ont des dents sans crêtes, ni dentelures.

» II. Parmi les *Stegosauria*, les formes les plus généralisées (*Stegosauridæ*), jurassiques, ont encore ces mêmes dents sans crêtes ni dentelures.

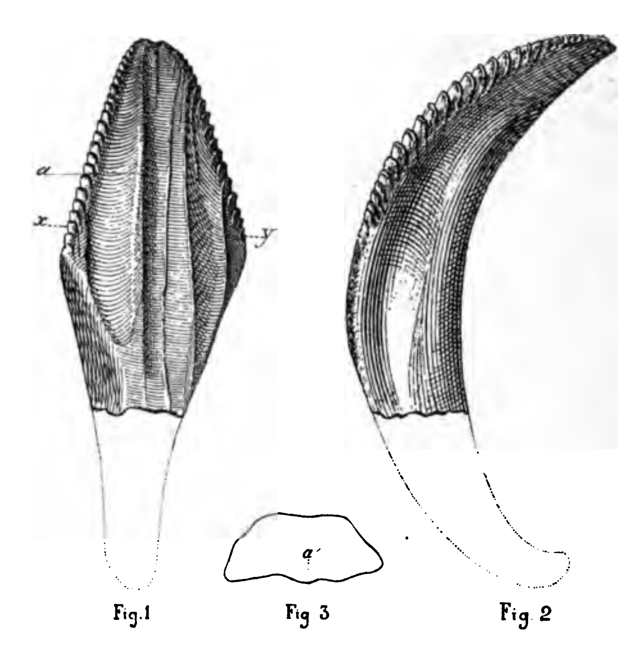


FIG. 1. — Dent d'*Iguanodon*. Échelle : $^1/_1$. Face émaillée.
a Crête primaire lisse.
FIG. 2. — La même. Profil.
FIG. 3. — Coupe suivant *xy*.

» III. Parmi les *Stegosauria*, les formes les plus spécialisées (*Scelidosauridæ*), jurassiques et crétacées, ont déjà des dents dentelées, mais sans crêtes bien exprimées.

» IV. Enfin, chez des formes encore plus éloignées des ***Sau-***

ropoda, les *Ornithopoda*, ayant bien des représentants dans le Jurassique, mais surtout développées dans le Crétacé, on peut noter les quatre modifications suivantes :

1° Couronne dentelée et portant une seule crête (*Hadrosaurus*) ;

2° Couronne dentelée portant une crête principale et des crêtes secondaires (*Iguanodon*) ;

a) Dentelures simples — *I. Prestwichii* — jurassique,

b) Dentelures elles-mêmes dentelées — *I. Mantelli* — wealdien ;

3° Couronne dentelée portant une crête principale et des crêtes secondaires dentelées, ainsi que des crêtes tertiaires lisses (*Craspedodon*) ;

4° Plusieurs dents simultanément en usage, simulant les molaires des Ongulés (*Cionodon*).

» De ce rapide exposé il semble résulter que, tandis que les perfectionnements de la dentition chez les Ongulés ont consisté dans les plissements de l'émail (chevaux), la multiplication des tubercules (cochons), l'augmentation de la hauteur de la couronne, la croissance persistante, etc., ils se sont manifestés chez les Dinosauriens herbivores par la production de crêtes, de dentelures ou l'usage simultané de plusieurs dents. Mais, pendant que les causes de l'évolution de la dentition nous sont pour ainsi dire connues chez les Ongulés [1], nous pouvons à peine esquisser celle du système dentaire des grands Reptiles qui les remplaçaient pendant les temps secondaires. »

Les naturalistes qui ont lu ces lignes n'auront certes pas manqué d'être surpris en voyant les *Stegosauridæ*, qui associent à quelques dispositions primitives des caractères si spécialisés [2], conserver la dentition des *Sauropoda* et y auront trouvé, comme nous le sentions nous-même, le point faible de notre explication.

---

[1] W. Kowalevsky, *Anthracotherium*, pp. 276 et 284.

[2] O.-C. Marsh, *Principal characters of American Jurassic Dinosaurs*, part. III (Amer. Journ. Sc. (Silliman), 1880, vol. XIX, p. 253.)

— O.-C. Marsh, *Ibid.*, part. IV. (*Spinal cord, Pelvis, and Limbs of Stegosaurus*) (Ibid., 1881, vol. XXI, p. 167.)

Cependant nous savons à présent que les dents attribuées par M. Marsh à *Stegosaurus* sont celles de *Diplodocus* ([1]) et que le premier de ces animaux avait une dentition rappelant celle de *Scelidosaurus*. Toute anomalie cesse donc et notre petite théorie se soutient mieux que jamais. Elle peut se résumer dans le tableau suivant :

DINOSAURIENS.			
I. HERBIVORES ([2]).			II. CARNIVORES.
1. *Sauropodes.*	2. *Stégosauriens.*	3. *Ornithopodes.*	1. *Théropodes.*
Dents sans dentelures ni crêtes.	Dents avec dentelures, mais sans crêtes bien accusées.	Dents avec dentelures et crêtes.	

([1]) O.-C. MARSH, *Principal characters of American Jurassic Dinosaurs*, part. VII (*On the Diplodocidæ, a new family of the Sauropoda*) (AMER. JOURN. SC. (Silliman), 1884, vol. XXVII, p. 165.)

([2]) G. BAUR, *Der Tarsus der Vögel und Dinosaurier, eine morphologische Studie.* (MORPHOLOGISCHES JAHRBUCH, 1882, vol. VIII, p. 40 du tiré à part.)

II

SUR LA PRÉSENCE D'UN CANAL BASIOCCIPITAL MÉDIAN ET DE DEUX CANAUX HYPOBASILAIRES CHEZ UN GENRE DE MOSASAURIENS.

Je m'occuperai, dans cette notice, d'abord du canal basioccipital médian, puis des canaux hypobasilaires.

§ I.

LE CANAL BASIOCCIPITAL MÉDIAN.

I. NATURE. — En faisant procéder au montage, suivant les instructions reçues de la Direction du Musée royal d'Histoire naturelle, des Mosasauriens de cet établissement, je remarquai que la base du crâne n° 1497 de *Plioplatecarpus Marshi*, Dollo [1], était perforée par un canal large et court, mettant en communication, dans le squelette, la cavité cérébrale avec l'extérieur. Cette conformation singulière m'intéressa vivement et je me proposai d'en rechercher la cause. Ce sont les résultats de mes investigations que je vais exposer dans les lignes ci-après.

Le canal dont il vient d'être question est susceptible, avant tout, de deux interprétations :

1. Ou il est le résultat d'une simple fracture;
2. Ou il constitue une disposition anatomique réelle.

Nous devons rejeter la première hypothèse, car :

1. La régularité de ce conduit, la nature lisse de ses parois et, surtout, leur aspect identique à celui des régions du crâne où il ne peut évidemment pas être question de fracture;
2. La présence d'une semblable communication sur un second crâne (n° 1498) de *Plioplatecarpus Marshi* la rendent inadmissible.

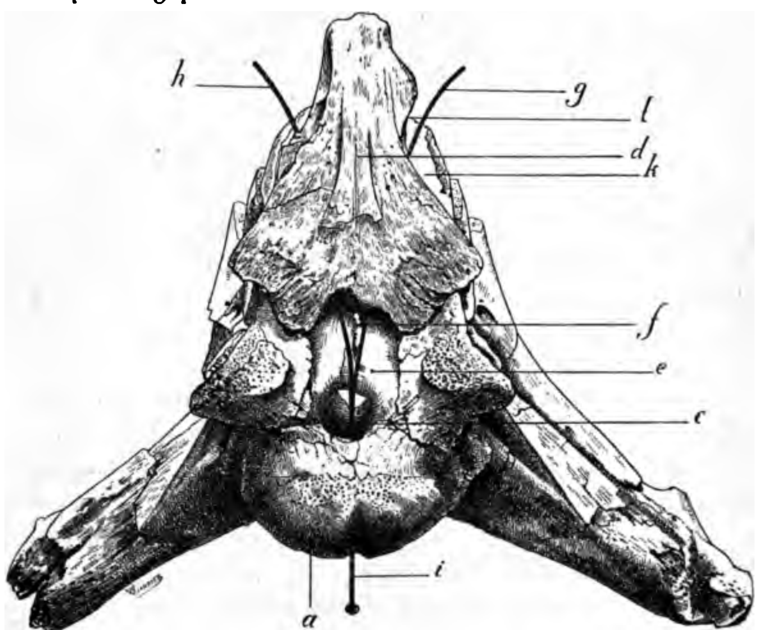
---

[1] L. DOLLO, *Note sur l'Ostéologie des Mosasauridæ*. (BULL. MUS. ROY. HIST. NAT. BELG., t. I, 1882, p. 62.)

Étant donné que notre canal correspond bien à une structure anatomique et n'est pas la conséquence d'un accident survenu pendant ou après la fossilisation, il y a encore lieu d'examiner s'il s'agit ici :

1. D'une disposition normale;

2. Ou d'une manifestation soit atavistique, soit tératologique, soit pathologique.



Vue ventrale de la portion de crâne n° 1497 (Cat. Rept. Mus. roy. hist. nat. Belg.) de *Plioplatecarpus Marshi*, Dollo.

a. Condyle occipital.
c. Canal basioccipital médian.
d. Parasphénoïde.
e. Basioccipital.
f. Crête osseuse médiane séparant le canal hypobasilaire droit du gauche.
g. Sortie du canal hypobasilaire gauche.
h. Sortie du canal hypobasilaire droit.
i. Soie montrant la continuité entre la cavité cérébrale, le canal basioccipital médian et les canaux hypobasilaires.
k. Basisphénoïde.
l. Fosse pituitaire.

Je crois que l'existence du canal sur les deux seuls crânes actuellement connus de *Plioplatecarpus Marshi* exclut la seconde interprétation.

Nous concluons donc de ce qui précède que : *Le canal large et court qui, dans le* Plioplatecarpus Marshi, *perce dorso-ventralement la base du crâne, dans le plan médian et tout contre le condyle occipital, est une structure anatomique normale.*

II. Homologie. — Cela posé, il convient maintenant de se demander si une pareille disposition a déjà été rencontrée chez d'autres Vertébrés, c'est-à-dire s'il existe un canal homologue du conduit de *Plioplatecarpus Marshi* et, dans l'affirmative, quel est-il?

1. Je pensai, à première inspection, que nous avions affaire, chez notre Mosasaurien, à la communication désignée par le professeur Marsh sous le nom de *canal pituitaire* et que l'illustre paléontologiste a définie (¹) de la manière suivante :

« In *Morosaurus,* the pituitary fossa is comparatively shallow much like that in the crocodile, and many birds, being connected with the under surface of the skull by the two usual divergent foramina for the passage of the internal carotid arteries. In *Apatosaurus*, however, it is remarkably different. Here the fossa becomes enlarged into a vertical canal, which, expanding below, communicates by a wide transverse orifice with the pharyngeal cavity. The arterial foramina are here canals thinly covered over with bone, and open just within the rim of the lower orifice. The pituitary cavity itself has a firm smooth wall throughout.

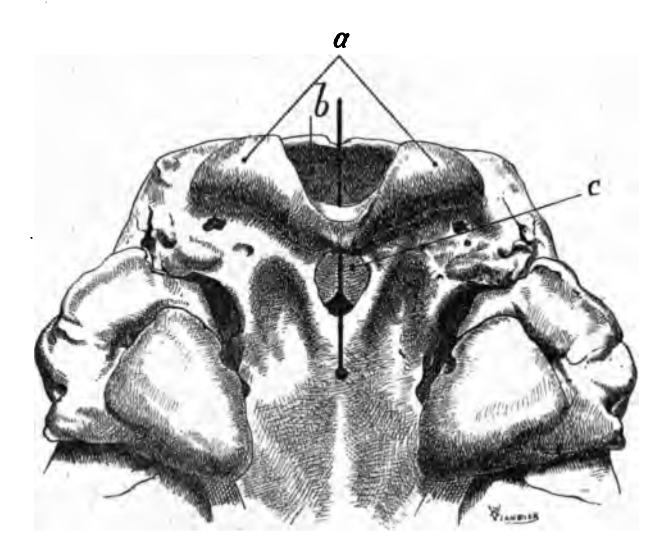
» This remarkable connection of the cerebral cavity with the alimentary canal is an embryonic character, and corresponds to the condition observed in the chick at the fifth day of incubation. This peculiar feature appears to be a family character of the *Atlantosauridæ.* »

Cependant, il est impossible d'identifier les deux conformations, puisque le canal pituitaire est nécessairement percé dans le basisphénoïde et n'est qu'une prolongation de la fosse pituitaire elle-même, tandis que le conduit du *Plioplatecarpus Marshi*

(¹) O.-C. Marsh, *Principal characters of American Jurassic Dinosaurs*, part. VI (*Restoration of Brontosaurus*) (Amer. Journ. Sc. (Silliman), 1883, vol. XXVI, pp. 82 et 85).

est foré dans le basioccipital et que, d'autre part, la fosse pituitaire de notre Mosasaurien est normalement développée.

2. Quelques Mammifères (*Phoca*, *Pelagius*, notamment) exhibent, dans la base du crâne, un grand trou, presque symétriquement divisé par le plan médian du corps et situé tout contre les condyles occipitaux, trou qui, dans le squelette, fait communi-



Vue ventrale d'une portion de crâne de *Pelagius monachus*, Cuv.

a. Condyles occipitaux.
b. Voûte du crâne, qu'on aperçoit au travers du grand trou occipital.
c. Fontanelle basioccipitale médiane.

quer la cavité cérébrale avec l'extérieur. Ne serait-ce point là l'homologue du canal de *Plioplatecarpus Marshi?* Il ne me semble pas. En effet, les parois de ce dernier sont épaisses, lisses et se raccordent, par un bord arrondi, avec les surfaces contiguës aux orifices d'entrée et de sortie. Au contraire, l'ouverture de *Pelagius*, par exemple, est un véritable trou : tout autour, la base du crâne vient s'amincir jusqu'à être rendue tranchante. En d'autres termes, chez *Pelagius*, nous avons une fontanelle (*fontanelle basioccipitale médiane*), due à une ossification incomplète, et fermée, pendant la vie, par une membrane qui disparaît lors

de la macération, au lieu que, dans le Mosasaurien du Musée de Bruxelles, nous rencontrons un canal au sens propre du mot. Les deux dispositions sont donc totalement différentes.

3. M. W.-K. Parker figure (1), chez divers embryons de Vertébrés, caudalement par rapport à la fosse pituitaire, un large espace de la base du crâne dépourvu de cartilage, espace qu'il appelle « *posterior basicranial fontanelle* ». Le canal de *Plioplatecarpus Marshi* ne serait-il point une persistance jusqu'à l'état adulte de cette disposition embryonnaire? Je ne puis le croire, puisque la « posterior basicranial fontanelle » est fermée par une membrane (2), tandis que, ainsi que nous le disions il n'y a qu'un instant, la communication de notre Mosasaurien est un véritable canal.

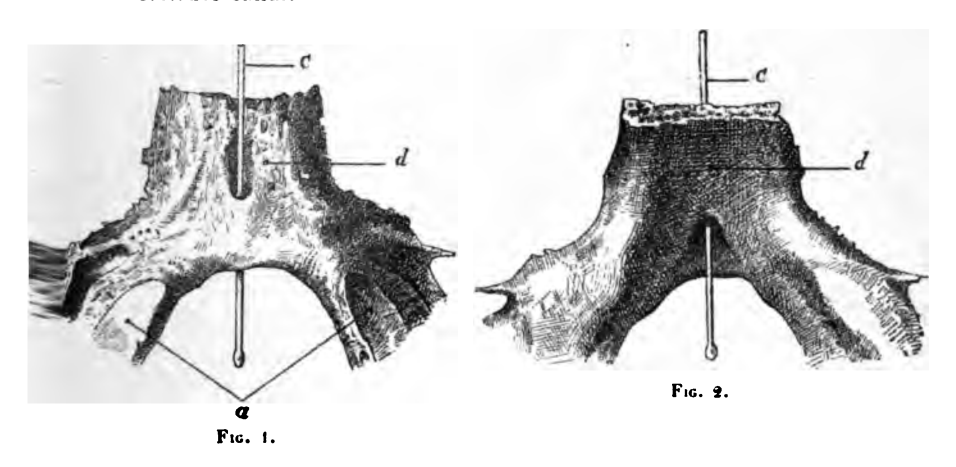


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 1. — Vue ventrale d'une portion d'occipital humain, dont la région basioccipitale est perforée par le *canalis basilaris medianus*, W. Gruber (canal basioccipital médian, Dollo) (d'après W. Gruber).

Fig. 2. — Le même os; vue dorsale (d'après W. Gruber).

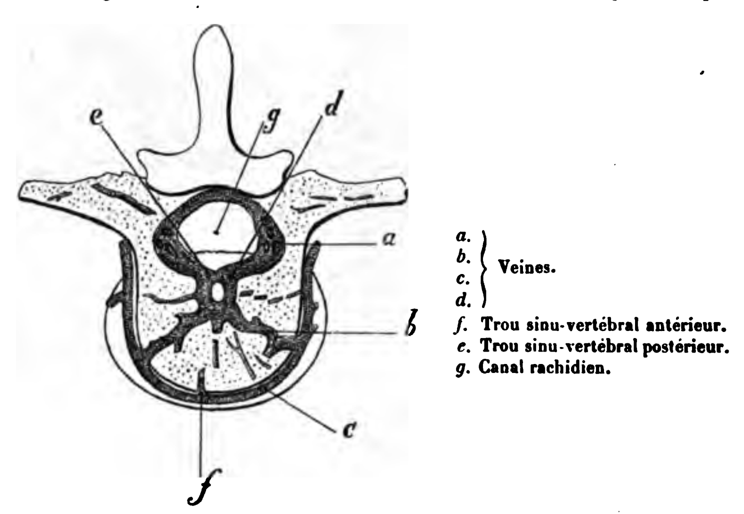
a. Condyles occipitaux.
c. Aiguille traversant le canal basioccipital médian.
d. Basioccipital.

(1) W.-K. Parker et G.-T. Bettany, *The Morphology of the Skull*. London, 1877, nos 139, 337, 443, 454, 465, 528, 539, 571, 703.
(2) W.-K. Parker et G.-T. Bettany, *loc. cit.*, p. 144.

4. Enfin, M. W. Gruber a décrit (1), comme anomalie de l'occipital humain, *un canal réel,* qui le perce dans le plan médian et un peu obliquement dorso-ventralement et caudo-crânialement, canal auquel il a attribué le nom de *canalis basilaris medianus.* C'est évidemment la même structure que celle montrée par *Plioplat ecarpus Marshi,* sauf pour les dimensions, qui sont, toutes proportions gardées, notablement plus faibles chez l'homme.

Notre canal est donc un « canalis basilaris medianus, W. Gruber » et, comme le canal pituitaire de M. Marsh est également basilaire et médian, je propose d'appeler l'anomalie humaine du savant anatomiste de Saint-Pétersbourg et la structure observée chez le *Plioplatecarpus Marshi : canal basioccipital médian.*

III. Homodynamie. — A présent que nous avons trouvé un homologue à la curieuse communication du *Plioplatecarpus*

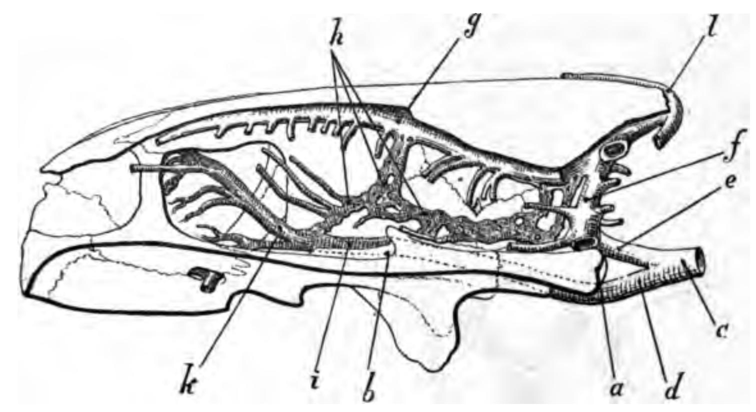


a. *b.* *c.* *d.* } Veines.
f. Trou sinu-vertébral antérieur.
e. Trou sinu-vertébral postérieur.
g. Canal rachidien.

Vertèbre destinée à montrer les trous sinu-vertébraux et les vaisseaux qui s'y rendent (d'après C. Gegenbaur).

(1) W. Gruber. *Ueber den anomalen Canalis basilaris medianus des Occipitale beim Menschen mit vergleichend-anatomischen Bemerkungen.* (Mém. Acad. Sciences Saint-Pétersbourg, 1880, t. XXVII, n° 9.)

Marshi, il convient de déterminer, si possible, la véritable valeur morphologique de cette disposition. En d'autres termes, le crâne proprement dit (à l'exception, par conséquent, des os dermiques qui s'y sont ajoutés) n'étant qu'un complexe de vertèbres plus ou moins transformées, nous allons rechercher s'il existe, dans des régions de la colonne vertébrale qui ont conservé leur structure primitive, un conduit qui puisse être comparé (ou mieux, qui soit homodyname) au canal basioccipital médian. Et comme l'os basioccipital, dans lequel notre canal est percé, correspond à un complexe de centres de vertèbres, nous examinerons plus particulièrement les centres des vertèbres non modifiées. Or, si nous nous reportons à ces pièces osseuses, nous voyons qu'elles sont ordinairement perforées par deux petites ouvertures sur la face dorsale (*trous sinu-vertébraux postérieurs*) et par deux



Coupe longitudinale d'un crâne de *Testudo Europæa,* avec le système veineux (d'après Bojanus).

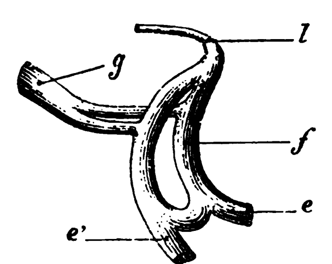
a. Condyle occipital.
b. Fosse pituitaire.
c. Veine jugulaire droite.
d. Veine infrajugulaire droite.
e. Veine suprajugulaire droite.
f. Sinus occipital.
g. Sinus falciforme.
h. Sinus latéral droit
i. Sinus caverneux.
k. Veine ophthalmique.
l. Veine médiane de la crête occipitale.

ouvertures analogues sur la face ventrale (*trous sinu-vertébraux antérieurs*), destinées au passage des vaisseaux qui pénètrent dans le diploë. Il n'est, d'autre part, point rare du tout d'ob-

server des trous sinu-vertébraux droits et gauches confluents, de manière qu'on n'aperçoit qu'un seul trou sinu-vertébral antérieur et un seul trou sinu-vertébral postérieur. Enfin, il arrive aussi que le trou sinu-vertébral antérieur unique est en relation directe, sans interposition de substance, avec le trou sinu-vertébral postérieur également unique : le centre de la vertèbre se trouve alors foré par un canal (*c. sinu-vertébral*) comparable au canal basioccipital médian, qui offre, d'ailleurs, chez l'homme, des dimensions identiques à celles qu'on constate dans les vertèbres isolées, tandis qu'il s'élargit beaucoup, par suite d'une adaptation fonctionnelle, chez le *Plioplatecarpus Marshi.*

En résumé : *le canal basioccipital médian serait homodyname à un* (*ou plusieurs confluents, car le basioccipital représente sans doute plus qu'un centre de vertèbre*) *canal sinu-vertébral.*

IV. Signification physiologique. — A quoi servait, dans le *Plioplatecarpus Marshi,* le canal basioccipital médian? Évidemment, nous n'avons point affaire ici à une confluence accidentelle des vaisseaux pénétrant ventralement et dorsalement dans le basioccipital : les dimensions de notre canal et sa présence sur les deux seuls crânes connus du Mosasaurien prémentionné s'opposent à cette explication. Mais, si nous étudions le système veineux des Reptiles (celui des Chéloniens, par exemple) [1], nous



e. Veine suprajugulaire droite.
e'. Veine suprajugulaire gauche.
f. Sinus occipital proprement dit.
g. Sinus falciforme.
l. Veine médiane de la crête occipitale.

Sinus occipital de *Testudo Europœa* (d'après Bojanus).

remarquons que le sang qui le parcourt revient du crâne par deux veines paires, qui se réunissent pour constituer les veines

---

[1] L.-H. Bojanus, *Anatome Testudinis Europœæ.* Vilnæ, 1819-1821.

jugulaires droite et gauche. Autrement dit, chaque veine jugulaire se divise en deux, comme on se dirige vers la tête : l'une, supérieure, qu'on pourrait appeler *veine suprajugulaire* et qui débouche dans un collier veineux (*sinus occipital*) entourant la moelle à son entrée dans le crâne; l'autre, inférieure, qu'il conviendrait peut-être de nommer *veine infrajugulaire* et qui suit la base du crâne pour pénétrer à son intérieur au niveau de la fosse pituitaire, où elle embrasse, avec son homonyme, l'hypophyse et où elle prend la qualification de *sinus caverneux*. Maintenant, si nous examinons un os basioccipital quelconque, non muni d'un canal basioccipital médian, nous voyons fréquemment, sur sa face dorsale, de petites ouvertures homodynames aux trous sinu-vertébraux postérieurs et, sur sa face ventrale, d'autres ouvertures analogues, homodynames aux trous sinu-vertébraux antérieurs. Or, il est clair que, dans la tortue disséquée par Bojanus, les veines des trous dorsaux du basioccipital sont des rameaux provenant du sinus occipital et les veines des trous ventraux, des vaisseaux débouchant, directement ou indirectement, dans les veines infrajugulaires. Si donc les trous dorsaux et ventraux sont confluents, c'est que le sinus occipital se trouve en relation avec les veines infrajugulaires. Conclusion : *Le canal basioccipital médian du* Plioplatecarpus Marshi *est une large communication entre le sinus occipital, puissant collier veineux entourant la moelle à son entrée dans le crâne, et les veines infrajugulaires.*

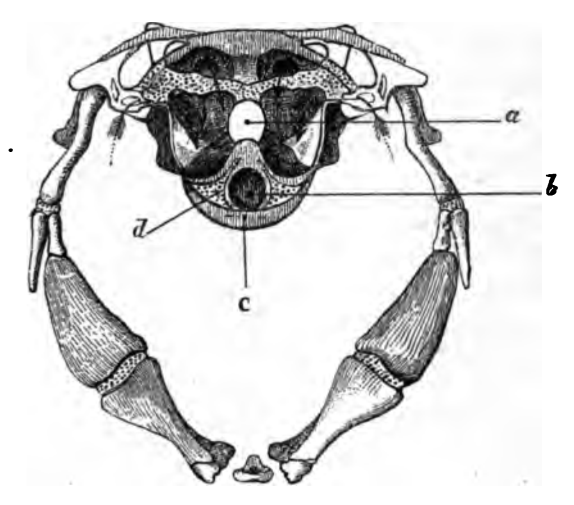
Cette disposition offre-t-elle quelque avantage sur ce qu'on voit dans les autres Mosasauriens? C'est une question à l'égard de laquelle nous aurons l'occasion d'exprimer une opinion dans un instant.

§ II.

LES CANAUX HYPOBASILAIRES.

I. Nature. — A partir du canal basioccipital médian, deux canaux pairs, accolés et partiellement séparés par une mince cloison osseuse, longent la base du crâne et vont déboucher à

droite et à gauche de la fosse pituitaire. Le raccord extrêmement net existant entre leur ouverture postérieure et le canal basi-occipital médian montre que ces communications avaient des relations directes avec la cavité cérébrale. Je propose d'appeler les deux canaux pairs dont il vient d'être question : *canaux hypobasilaires*.



Coupe au travers du crâne d'un Poisson téléostéen (*Esox lucius*, L.) (d'après Huxley).

a. Cavité cérébrale. *c*. Parasphénoïde.
b. Canal oculo-moteur. *d*. Basisphénoïde.

II. Homologie. — Puisque le professeur Huxley admet ([1]) que la partie la plus inférieure du basisphénoïde des Sauropsides représente le parasphénoïde des Ichtyopsides, je suis porté à homologiser les deux canaux hypobasilaires, d'ailleurs partiellement confluents, avec le large canal qui suit, ventralement, la base du crâne chez les Téléostéens et qui renferme notamment les muscles moteurs des yeux (*canal oculo-moteur*), d'autant plus

([1]) T.-H. Huxley, *A Manual of the Anatomy of vertebrated Animals*. London, 1871, pp. 236 et 283.
— T.-H. Huxley, *Lectures on the elements of comparative Anatomy*. London, 1864.

que les veines infrajugulaires donnent, chez la tortue de Bojanus, naissance aux veines ophtalmiques.

III. Homodynamie. — Si, comme le veut le professeur Albrecht ([1]), le parasphénoïde n'est qu'un complexe d'hypapophyses (ou, ce qui revient au même, d'os chevrons), les canaux hypobasilaires seraient, ensemble, homodynames au canal (restreint à la région caudale chez les Amniotes) limité par les centres et les os chevrons (*canal hypocentral*).

IV. Signification physiologique. — Attendu, d'une part, que les canaux hypobasilaires longent la base du crâne et viennent déboucher à droite et à gauche de la fosse pituitaire, et me référant, d'autre part, aux figures de Bojanus ([2]), je suis tenté de croire qu'ils servaient à protéger les veines infrajugulaires.

Quel était, pour finir, l'avantage des dispositions que nous avons étudiées dans cette notice (canal basioccipital médian et canaux hypobasilaires) et qui manquent aux autres Mosasauriens? Nous allons essayer de l'exposer, au moins tel que nous le comprenons.

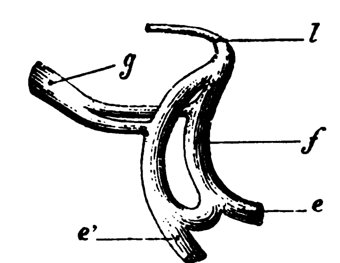
Puisque les veines infrajugulaires se trouvaient en communication immédiate et facile avec le sinus occipital, tout le sang veineux de la tête pouvait retourner vers la veine jugulaire par la veine suprajugulaire. La portion de chaque veine infrajugulaire située entre le canal basioccipital médian et la veine jugulaire correspondante, n'étant plus nécessaire, a dû s'atrophier, de sorte que la veine jugulaire ne présentait vraisemblablement pas, chez *Plioplatecarpus Marshi*, de bifurcation avant d'entrer dans le crâne. Une semblable substitution d'un vaisseau (veine suprajugulaire) à deux autres (veine suprajugulaire + veine infrajugulaire) n'est d'ailleurs point un fait isolé. On sait ([3]), en effet,

([1]) Communication verbale de notre savant ami.
([2]) L.-H. Bojanus, *loc. cit.*, tab. XXI, *g.* et *ñ*.
([3]) A.-H. Garrod, *On the carotid arteries of Birds*. (Proc. Zool. Soc. London, 1873 p. 457.)

server des trous sinu-vertébraux droits et gauches confluents, de manière qu'on n'aperçoit qu'un seul trou sinu-vertébral antérieur et un seul trou sinu-vertébral postérieur. Enfin, il arrive aussi que le trou sinu-vertébral antérieur unique est en relation directe, sans interposition de substance, avec le trou sinu-vertébral postérieur également unique : le centre de la vertèbre se trouve alors foré par un canal (*c. sinu-vertébral*) comparable au canal basioccipital médian, qui offre, d'ailleurs, chez l'homme, des dimensions identiques à celles qu'on constate dans les vertèbres isolées, tandis qu'il s'élargit beaucoup, par suite d'une adaptation fonctionnelle, chez le *Plioplatecarpus Marshi*.

En résumé : *le canal basioccipital médian serait homodyname à un* (*ou plusieurs confluents, car le basioccipital représente sans doute plus qu'un centre de vertèbre*) *canal sinu-vertébral.*

IV. Signification physiologique. — A quoi servait, dans le *Plioplatecarpus Marshi,* le canal basioccipital médian? Évidemment, nous n'avons point affaire ici à une confluence accidentelle des vaisseaux pénétrant ventralement et dorsalement dans le basioccipital : les dimensions de notre canal et sa présence sur les deux seuls crânes connus du Mosasaurien prémentionné s'opposent à cette explication. Mais, si nous étudions le système veineux des Reptiles (celui des Chéloniens, par exemple) (1), nous



e. Veine suprajugulaire droite.
e'. Veine suprajugulaire gauche.
f. Sinus occipital proprement dit.
g. Sinus falciforme.
l. Veine médiane de la crête occipitale.

Sinus occipital de *Testudo Europæa* (d'après Bojanus).

remarquons que le sang qui le parcourt revient du crâne par deux veines paires, qui se réunissent pour constituer les veines

(1) L.-H. Bojanus, *Anatome Testudinis Europææ*. Vilnæ, 1819-1821.

jugulaires droite et gauche. Autrement dit, chaque veine jugulaire se divise en deux, comme on se dirige vers la tête : l'une, supérieure, qu'on pourrait appeler *veine suprajugulaire* et qui débouche dans un collier veineux (*sinus occipital*) entourant la moelle à son entrée dans le crâne; l'autre, inférieure, qu'il conviendrait peut-être de nommer *veine infrajugulaire* et qui suit la base du crâne pour pénétrer à son intérieur au niveau de la fosse pituitaire, où elle embrasse, avec son homonyme, l'hypophyse et où elle prend la qualification de *sinus caverneux*. Maintenant, si nous examinons un os basioccipital quelconque, non muni d'un canal basioccipital médian, nous voyons fréquemment, sur sa face dorsale, de petites ouvertures homodynames aux trous sinu-vertébraux postérieurs et, sur sa face ventrale, d'autres ouvertures analogues, homodynames aux trous sinu-vertébraux antérieurs. Or, il est clair que, dans la tortue disséquée par Bojanus, les veines des trous dorsaux du basioccipital sont des rameaux provenant du sinus occipital et les veines des trous ventraux, des vaisseaux débouchant, directement ou indirectement, dans les veines infrajugulaires. Si donc les trous dorsaux et ventraux sont confluents, c'est que le sinus occipital se trouve en relation avec les veines infrajugulaires. Conclusion : *Le canal basioccipital médian du* Plioplatecarpus Marshi *est une large communication entre le sinus occipital, puissant collier veineux entourant la moelle à son entrée dans le crâne, et les veines infrajugulaires.*

Cette disposition offre-t-elle quelque avantage sur ce qu'on voit dans les autres Mosasauriens? C'est une question à l'égard de laquelle nous aurons l'occasion d'exprimer une opinion dans un instant.

§ II.

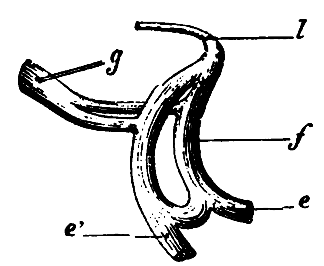
LES CANAUX HYPOBASILAIRES.

I. Nature. — A partir du canal basioccipital médian, deux canaux pairs, accolés et partiellement séparés par une mince cloison osseuse, longent la base du crâne et vont déboucher à

server des trous sinu-vertébraux droits et gauches confluents, de manière qu'on n'aperçoit qu'un seul trou sinu-vertébral antérieur et un seul trou sinu-vertébral postérieur. Enfin, il arrive aussi que le trou sinu-vertébral antérieur unique est en relation directe, sans interposition de substance, avec le trou sinu-vertébral postérieur également unique : le centre de la vertèbre se trouve alors foré par un canal (*c. sinu-vertébral*) comparable au canal basioccipital médian, qui offre, d'ailleurs, chez l'homme, des dimensions identiques à celles qu'on constate dans les vertèbres isolées, tandis qu'il s'élargit beaucoup, par suite d'une adaptation fonctionnelle, chez le *Plioplatecarpus Marshi.*

En résumé : *le canal basioccipital médian serait homodyname à un (ou plusieurs confluents, car le basioccipital représente sans doute plus qu'un centre de vertèbre) canal sinu-vertébral.*

IV. Signification physiologique. — A quoi servait, dans le *Plioplatecarpus Marshi,* le canal basioccipital médian? Évidemment, nous n'avons point affaire ici à une confluence accidentelle des vaisseaux pénétrant ventralement et dorsalement dans le basioccipital : les dimensions de notre canal et sa présence sur les deux seuls crânes connus du Mosasaurien prémentionné s'opposent à cette explication. Mais, si nous étudions le système veineux des Reptiles (celui des Chéloniens, par exemple) [1], nous



e. Veine suprajugulaire droite.
e'. Veine suprajugulaire gauche.
f. Sinus occipital proprement dit.
g. Sinus falciforme.
l. Veine médiane de la crête occipitale.

Sinus occipital de *Testudo Europœa* (d'après Bojanus).

remarquons que le sang qui le parcourt revient du crâne par deux veines paires, qui se réunissent pour constituer les veines

(1) L.-H. Bojanus, *Anatome Testudinis Europœæ*. Vilnæ, 1819-1821.

l'exclusion de tous autres fossiles vertébrés, et, de plus, il était presque directement appliqué contre l'omoplate, sur l'origine de laquelle il ne saurait y avoir le moindre doute. Cela admis,

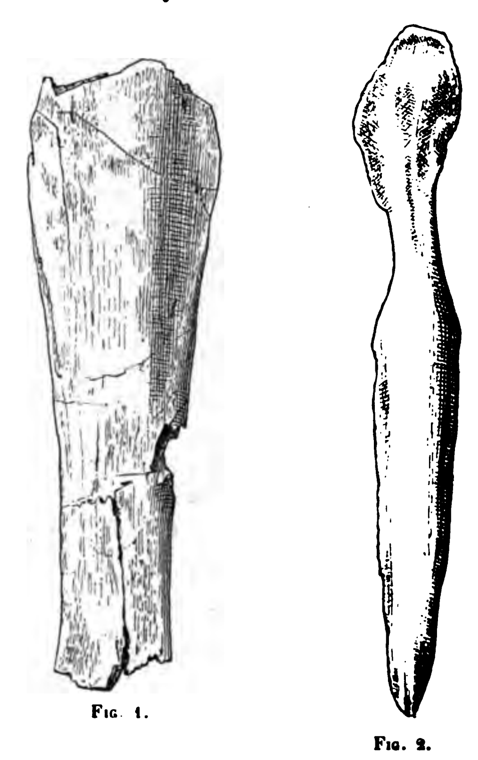


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 1. — Fragment de l'interclavicule du *Plioplatecarpus Marshi*, Dollo.
Fig. 2. — Interclavicule de Crocodilien.

cet os est-il bien un fragment d'interclavicule? Je le pense et voici pourquoi :

1. Il en a la forme, ainsi qu'on peut s'en convaincre par la comparaison avec l'interclavicule d'un Crocodilien, que nous représentons à côté.

2. Il ne saurait être identifié avec aucune portion du crâne, de l'appareil hyoïde, de la colonne vertébrale et de ses appendices, des ceintures scapulaire (au moins limitée aux éléments qu'on lui attribuait jusqu'à ce jour) et pelvienne, du sternum

et des membres des Mosasauriens. C'est donc une pièce osseuse nouvelle pour ce sous-ordre et, dans ces conditions, je ne vois pas qu'on puisse la déterminer autrement que comme interclavicule.

3. Sa position dans la gangue, tout contre l'omoplate, est, d'autre part, une *présomption* en faveur de son attribution à la ceinture scapulaire (au moins le professeur Marsh concluait-il ainsi lorsqu'il s'agissait des soi-disant clavicules de l'*Iguanodon*) (1). Et dans ce cas encore, je ne comprends pas qu'on puisse la considérer comme autre chose qu'une interclavicule.

4. Quand, chez les Mammifères et les Oiseaux, l'interclavicule et les clavicules disparaissent, c'est toujours celle-là qui est perdue la première. Au contraire, chez les Reptiles, à l'exception des Lacertiliens serpentiformes (2) et des Chéloniens (3) avec lesquels il n'y a pas lieu de comparer les Mosasauriens, l'interclavicule semble persister plus longtemps que les clavicules (Crocodiliens). Il n'y aurait donc rien d'étonnant à ce qu'elle se fût conservée ici, d'autant plus que *Plioplatecarpus Marshi* paraît, à plusieurs égards (sacrum (4), membres (5)), moins spécialisé que les autres Mosasauriens, auxquels manquent à la fois les clavicules et l'interclavicule.

§ II.

PLIOPLATECARPIDÆ ET *MOSASAURIDÆ*.

Si l'on se souvient :

1. Que le professeur Marsh a introduit (6) la présence du canal pituitaire comme caractère dans une diagnose de famille

---

(1) H.-N. Moseley, *Iguanodon*. (Nature, sept. 27, 1883, p. 515.)

(2) Max Fürbringer, *Die Knochen und Muskeln der Extremitäten bei den schlangenähnlichen Sauriern*. Leipzig, 1870, pl. I, fig. 5 (*Pygopus*) et 6 (*Lialis*).

(3) L. Dollo, *L'appareil sternal de l'Iguanodon*, in *Rev. d. quest. scient.* Bruxelles [illegible], p. 670.

(4) L. Dollo, *loc. cit.*, p. 63.

(5) L. Dollo, *loc. cit.*, p. 64.

(6) O. C. Marsh, *Principal characters of American Jurassic Dinosaurs*, part. VI, [illegible] *of Brontosaurus*. (Amer. Journ. Sc. (Silliman), 1883, vol. XXVI, p. 85.)

pour les Dinosauriens sauropodes, et que *Plioplatecarpus Marshi* possède un canal basioccipital médian, à l'exclusion de tous les autres Mosasauriens;

2. Que le même naturaliste s'est servi [1] de la présence ou de l'absence de clavicules pour délimiter deux familles de Dinosauriens ornithopodes, et que *Plioplatecarpus Marshi* possède une interclavicule, à l'exclusion encore de tous les autres Mosasauriens;

3. Que seul enfin de tous les Mosasauriens, *Plioplatecarpus Marshi* était pourvu d'un sacrum de deux vertèbres synostosées, je crois qu'on reconnaîtra que la division ci-après du sous-ordre des *Mosasauria* est parfaitement justifiée :

MOSASAURIA.

α. Un sacrum; β. Une interclavicule; γ. Un canal basioccipital médian et des canaux hypobasilaires.	Non.
I. PLIOPLATECARPIDÆ.	II. MOSASAURIDÆ.

I. PLIOPLATECARPIDÆ	II. MOSASAURIDÆ	
1. *Plioplatecarpus*, Dollo.	1. *Baptosaurus*, Marsh.	7. *Clidastes*, Cope.
	2. *Pterycollosaurus*, Dollo.	8. *Lestosaurus*, Marsh.
	3. *Mosasaurus*, Conyb.	9. *Tylosaurus* (*Rhinosaurus*), Marsh.
	4. *Platecarpus*, Cope.	10. *Edestosaurus*, Marsh
	5. *Leiodon*, Owen.	11. *Holosaurus*, Marsh[2].
	6. *Sironectes*, Cope.	

---

(1) O.-C. MARSH, *Classification of the Dinosauria.* (AMER. JOURN. SC. (Silliman), 1882, vol. XXIII, p. 81.)

(2) On doit joindre aux genres qui précèdent : 12 *Hainosaurus*, Dollo. (Note ajoutée pendant l'impression.)

IV

SUR LES ÉPIPHYSES DU CALCANÉUM DES LACERTILIENS.

J'ai fait connaître, dans un autre travail ([1]), les épiphyses que j'avais rencontrées jusqu'à présent chez les Lacertiliens. Je viens aujourd'hui appeler l'attention sur d'autres qui me semblent particulièrement intéressantes : les épiphyses du calcanéum de ces Reptiles.

I. On sait que les seuls os du carpe et du tarse qui, chez les

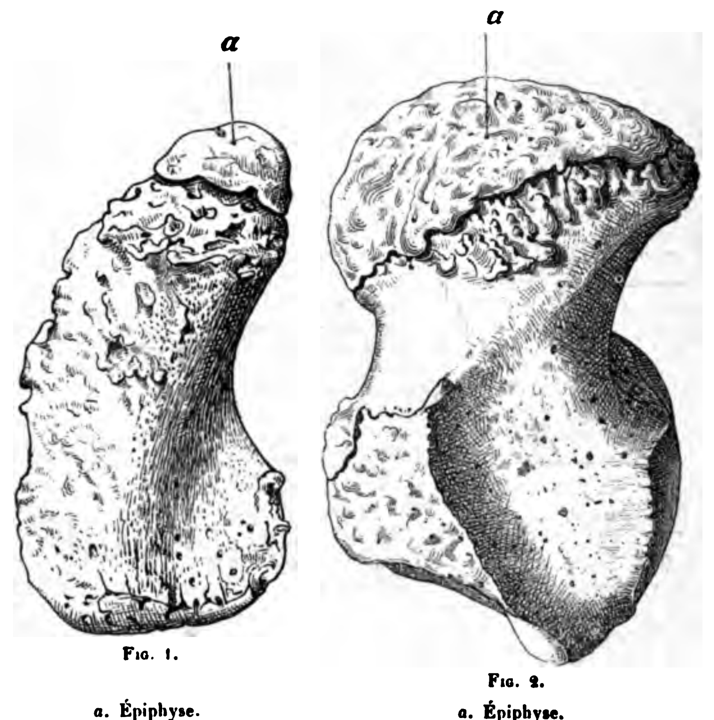


Fig. 1. — a. Épiphyse.

Fig. 2. — a. Épiphyse.

Fig. 1. — Pisiforme de *Loxodon africanus*, Blum.
Fig 2. — Calcanéum de *Loxodon africanus*, Blum.

([1]) L. Dollo, *Sur les épiphyses des Lacertiliens.* (Zoologischer Anzeiger, 1884, nos 159 et 160.)

